ACADÉMIE DES SCIENCES.

SÉANCE DU LUNDI 22 JANVIER 1923.

PRÉSIDENCE DE M. ALBIN HALLER.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS

DES MEMBRES ET DES CORRESPONDANTS DE L'ACADÉMIE.

M. G. BIGOURDAN donne lecture de la Notice suivante :

La mort vient d'enlever à notre Académie un de ses plus anciens correspondants étrangers, HENDRICUS GERARDUS VAN DE SANDE BAKHUYZEN, décédé à Leyde le 8 de ce mois.

Il était né à La Haye le 2 avril 1838 et il fut successivement professeur dans un Gymnase de cette ville, dans une École d'Utrecht et au Polytechnicum de Delft; en 1872 il devint professeur d'Astronomie à l'Université de Leyde et en même temps directeur de l'Observatoire de cette ville. Quoiqu'il eût professé la Physique à Delft, il est surtout connu comme astronome; et sous sa direction l'Observatoire de Leyde a maintenu et même accru sa haute réputation, particulièrement pour l'astronomie de position la plus précise.

Ses déterminations d'étoiles fondamentales jouissent d'une considération légitime, car il avait su les dépouiller de diverses équations personnelles, par l'emploi d'appareils spéciaux qu'il avait imaginés lui-même. Le catalogue de 10239 étoiles de $+30^\circ$ à $+35^\circ$ de déclinaison, fait sous sa direction pour collaborer à la grande revue du Ciel par l'Association astronomique allemande, est également très apprécié. Et c'est aussi sous sa direction que J.-C. Kapteyn, notre correspondant décédé depuis peu, appliqua pour la première fois la méthode de détermination de nombreuses parallaxes stellaires avec un instrument méridien.

Il avait repris aussi, de concert avec D. Gill, l'emploi de la méthode préconisée par La Caille au XVIIIe siècle pour déterminer la réfraction astrono-

mique : cette méthode exige des observations faites en des stations éloignées d'environ 90° en latitude, afin que certaines étoiles qui culminent dans l'une près de l'horizon passent près du zénith de l'autre; et tel est à peu près le cas pour les deux observations de Leyde et du Cap.

H.-G. van de Sande Bakhuyzen fit aussi beaucoup de déterminations de longitudes, notamment avec Paris, où il venait volontiers; il me faisait remarquer un jour que ce voyage ne lui occasionnait aucune perte bien sensible de temps, car il pouvait quitter son Observatoire le matin assez tard et observer ici le soir du même jour.

Il apporta également une contribution importante à l'explication de la variation des latitudes, en étudiant les changements du niveau moyen de la mer sur les côtes hollandaises; et ses recherches étendues sur la translation du système solaire sont également très connues.

Les observations physiques l'attirèrent également, au moins dans la mesure où elles pouvaient se concilier avec tant d'autres travaux : on lui doit un Mémoire important sur la rotation de Mars et sur les changements qui se produisent à la surface de cette planète. En s'aidant de dessins faits autrefois par Schrœter il détermina cette durée de rotation à une petite fraction de seconde près.

Il eut aussi une grande part dans la publication des Œuvres complètes d'Huyghens, monument bien connu, élevé par la Hollande à un de ses plus illustres enfants.

H.-G. van de Sande Bakhuyzen avait pris depuis longtemps sa retraite de directeur de l'Observatoire de Leyde, mais il était resté Secrétaire de l'Association géodésique internationale, puis il l'était devenu de l'Association géodésique réduite. En outre il était Président de la Commission géodésique néerlandaise. Il était devenu correspondant de notre Académie en 1896.

ASTRONOMIE. — *Sur les coordonnées des* Observatoires *ou* Cabinets *de la Muette et de Passy*. Note de M. G. **Bigourdan**.

Au XVIIIe siècle, le goût des collections d'instruments d'astronomie et de physique était très répandu : les grands seigneurs, les magistrats, les financiers se créèrent à l'envie des *Cabinets*, de sorte qu'en 1787 un guide de Paris n'en signale pas moins de 46. C'est ainsi qu'un Cabinet de physique

fut fondé à la Muette ([1]), où Louis XV habitait parfois; il servit notamment à des expériences auxquelles assistèrent des Savants de l'époque, tels que Buffon, de Fouchy, etc.

Ce Cabinet existait déjà en 1750 et fut d'abord dirigé par un Mongol, sur lequel nous n'avons aucun renseignement. En 1756, il passa sous la direction d'un profès bénédictin, dom Noël ([2]), qui s'était occupé avec succès de la construction d'instruments d'optique, et qui même avait entrepris déjà l'exécution d'un très grand télescope, dépassant de beaucoup, par ses dimensions, tout ce qui avait été fait jusqu'alors.

En 1756 on fit construire à l'extrémité du Jardin de la Muette un pavillon, qualifié parfois de *petit Observatoire* et qui fut le premier des Cabinets dont nous parlons.

Cabinet de la Muette. Ses coordonnées.

La position de ce cabinet ne nous est connue que par un plan conservé aux Archives nationales (O_1, 1581) et qui d'ailleurs n'est pas bien explicite quant à la place exacte.

D'après ce plan, c'était une construction rectangulaire, de 25^m de long sur 8^m de large, « pour le télescope du Roi et les ouvrages mécaniques du P. Noël ». Il était placé presque au sommet de l'angle Nord-Ouest que forment aujourd'hui les rues de la Pompe et de Siam.

Ce cabinet se trouva bientôt insuffisant, et on voulut l'agrandir; mais comme un projet dressé par l'architecte Gabriel montait à une somme trop

([1]) Pour plus de détails, voir G. Bigourdan, *Un Institut d'optique à Paris au* XVIII[e] *siècle*, dans les *Comptes rendus du Congrès des Sociétés savantes en* 1921, Sciences, p. 19-74. Il en existe un tirage à part de 56 pages, Paris, 1922. — Voir aussi L. Mar, *Le Cabinet de Physique du roi* dans le *Bull. de la Société historique d'Auteuil*, III, p. 152.

([2]) Dom Noël, né en 1712 ou 1713, mourut à la fin de janvier 1783. Par la protection du duc de Chaulnes, et sur la demande du roi, il fut appelé de l'abbaye de Saint-Thierry, près de Reims, à celle de Saint-Germain-des-Prés à Paris, où il établit un atelier qui occupa jusqu'à 40 ouvriers.

Vers 1755 il voulut fonder à Saint-Germain-des-Prés une sorte d'Académie d'optique, et dans cette vue il offrit à ses Supérieurs un assortiment considérable d'instruments avec une somme de 24000 # pour leur installation. Après quelques hésitations, les Supérieurs déclinèrent l'offre qui alors fut acceptée par le roi, avec les services de dom Noël à la Muette; quelque temps après (10 avril 1759) un brevet royal donnait à dom Noël le titre de *Garde et Démonstrateur* du Cabinet de Physique et d'Optique de Sa Majesté, établi à la Muette.

« considérable dans les circonstances présentes », on acquit en 1760 un hôtel voisin, situé rue de Passy, pour servir au même usage; c'est là que fut installé le second Cabinet, auquel nous allons revenir, et qui est généralement confondu avec le premier. Mais on conserva celui-ci comme dépôt, et même on y observa le passage de Vénus de 1769, parce que, le Soleil devant être très bas au moment de l'entrée de la planète, on n'avait pu trouver dans le nouveau Cabinet d'emplacement convenable : cette observation y fut faite ([1]) par de Fouchy, Bailly, dom Noël, de Bory et l'abbé Bourriot.

Après la retraite de dom Noël (1er janvier 1775) ce premier cabinet servit quelque temps d'Observatoire et de laboratoire à Rochon, chargé spécialement des parties optiques et astronomiques. Rochon faisait travailler là quelques ouvriers, outre ceux qu'il occupait au dehors, et y exécuta une partie des travaux que nous aurons à rappeler. Après la mort de dom Noël, en 1783, Rochon eut à sa disposition d'autres locaux, et dès lors il n'est plus question de ce premier cabinet : construit en 1756, il n'aurait donc eu qu'une durée d'environ 30 ans.

D'après le plan dont nous avons parlé, reporté sur la plan de Paris à 2^{mm} par mètre, l'intersection des diagonales du rectangle qui constituait ce cabinet se trouvait, par rapport à notre origine habituelle, 4490^{m} à l'Ouest et 2802^{m} au Nord : c'est de là qu'ont été déduites les coordonnées angulaires données plus loin.

MÉCANIQUE. — *Sur l'orbite de Mercure.* Note de M. L. LECORNU.

Dans une Note sur *Le problème des n corps dans la théorie de la relativité* ([2]), M. J. Haag vient de montrer que l'effet Einstein concernant le déplacement du périhélie de Mercure peut être expliqué par la mécanique classique en ajoutant à l'attraction newtonienne F une petite force tangentielle

$$F_1 = 2\,F v r'$$

et une petite force $F_2 = F(2v^2 - 3r'^2)$ dirigée, comme F, vers le Soleil (l'unité de vitesse étant la vitesse constante de la lumière).

([1]) *Hist. et Mém. de l'Acad. des Sciences*, année 1769, *Hist.*, p. 95, et *Mém.*, p. 531. Pour le point d'observation la longitude indiquée est $14^{s},5$ à l'Ouest, comme en 1761, ce qui peut faire croire qu'il fut le même qu'en 1769, mais cela tient à ce que les deux points d'observation de 1761 et de 1769 sont à peu près sur le même méridien.

([2]) *Comptes rendus*, t. 176, 1923, p. 163.

Voici une conséquence de cette interprétation.

Soit i l'angle de la tangente avec le rayon vecteur issu du Soleil. On a

$$r' = v \cos i, \qquad \text{d'où} \qquad F_1 = 2 F v^2 \cos i$$

et

$$F_2 = 2 F v^2 \left(1 - \frac{3}{2} \cos^2 i \right).$$

D'autre part, e désignant l'excentricité de l'orbite, égale, pour Mercure, à 0,205, le maximum de $\frac{3}{2}\cos^2 i$ est $\frac{3}{2} e^2 = 0{,}063$ et sa valeur moyenne est environ 0,03. On peut donc, avec une erreur insignifiante, réduire F_2 à $2Fv^2$.

Ceci étant, observons que la projection $F_2 \cos i$ de F_2 sur la tangente est égale et opposée à F_1, en sorte que tout se passe comme si à l'attraction newtonienne s'adjoignait une force $F_3 = F_2 \sin i = 2 F v^2 \sin i$, perpendiculaire à la vitesse. D'ailleurs,

$$v r \sin i = \frac{2 \pi a b}{T}.$$

Remplaçons en outre F par sa valeur connue $\frac{4\pi^2 a^3}{T^2} \frac{m}{r^2}$ et mettons en évidence la vitesse c de la lumière.

Il vient ainsi :

$$F_3 = \frac{16 \pi^2 a^4 b}{c^2 T^3} \frac{m v}{r^3}.$$

Dans ma Communication du 6 février 1922, intitulée *Quelques remarques sur la relativité*, j'ai signalé, après M. D. Berthelot, la possibilité d'expliquer le déplacement du périhélie de Mercure par l'existence d'une force $v f(r)$ perpendiculaire à la vitesse; j'ajoutais que l'assimilation du Soleil à un aimant conduirait à prendre $f(r) = \frac{K}{r^3}$ (K désignant une constante).

On voit que le calcul de M. Haag, déduit de la formule d'Einstein-Schwarzchild, aboutit sensiblement au même résultat.

PHYSIOLOGIE VÉGÉTALE. — *A propos d'une Communication récente de MM. P.-A. Dangeard et Pierre Dangeard.* Note de M. **L. Maquenne**.

L'année dernière, nons avons annoncé, M. Demoussy et moi, que les feuilles adultes d'*Aucuba japonica* se conservent dans le vide, à la lumière, pendant plus d'un an, sans changer de couleur et sans perdre leur faculté

de décomposer l'acide carbonique au Soleil ([1]). Cette propriété étant l'une des plus caractéristiques de la végétation normale, nous en avons conclu que les feuilles de cette espèce étaient restées vivantes pendant ce long laps de temps. MM. Dangeard viennent dans un important travail de vérifier pleinement l'exactitude de cette manière de voir ([2]); ces auteurs n'ont pu, en effet, par l'examen le plus attentif, constater au début de novembre la moindre différence digne de remarque entre une feuille que j'avais mise moi-même en tube scellé le 30 mai 1922 et une autre fraîchement cueillie. Les microsomes y sont animés des mêmes mouvements; les colorants vitaux, dont notre savant Confrère fait usage depuis plusieurs années pour reconnaître si une cellule végétale est vivante ou morte, donnent lieu dans l'une et dans l'autre aux mêmes réactions. Il est donc bien certain que la feuille dont il s'agit avait conservé toute sa vitalité dans les conditions normales où on l'avait maintenue pendant 6 mois, en l'absence d'air et de toute communication avec la souche qui l'avait portée.

Cette conclusion, qui résultait déjà de notre travail personnel et que les minutieuses recherches de MM. Dangeard viennent de rendre irréfutable, entraîne un certain nombre de conséquences qu'il nous paraît utile de mettre en lumière parce qu'elles intéressent de près la biologie végétale.

C'est d'abord l'indépendance remarquable des feuilles d'*Aucuba* vis-à-vis des autres organes de la plante. Les observations qui précèdent montrent, en effet, que chacune d'elles est capable de vivre d'une vie propre, tellement que, si pareilles greffes étaient possibles, il serait possible aussi de reconstituer sans dommage un sujet mutilé en en rapprochant les feuilles, détachées à l'origine et conservées, comme il vient d'être dit, pendant plus ou moins longtemps. Sous cette forme, l'expérience n'est pas réalisable, mais peut-être le serait-elle avec un rameau, qui sans doute se conserverait dans le vide, à la lumière, aussi bien qu'une feuille isolée. Cette indépendance ne doit d'ailleurs se manifester que chez les feuilles adultes, qui ont atteint leur maximum d'accroissement et, par suite, n'ont plus besoin d'aucun apport de matière nutritive empruntée aux réserves du bois; on peut voir là l'une des raisons pour lesquelles elles sont persistantes.

C'est ensuite la constatation de ce fait que la lumière, indispensable à l'accomplissement du phénomène qui nous occupe, n'a pas seulement pour effet d'exciter la fonction chlorophyllienne, nécessaire pour compenser les

([1]) *Comptes rendus*, t. 174, 1922, p. 1387.
([2]) *Comptes rendus*, t. 176, 1923, p. 49.

pertes dues à la respiration nocturne, mais qu'elle est en partie transformée en énergie mécanique, que la cellule conservée utilise à faire mouvoir son protoplasma : analogie évidente avec la cellule normale, sur laquelle MM. Dangeard insistent avec juste raison parce qu'elle porte sur l'un des plus importants caractères de la vie.

Enfin il est bon de rappeler, comme nous l'avons déjà fait, M. Demoussy et moi, dans la Communication précitée, que ces phénomènes ne peuvent s'accomplir que si le quotient respiratoire des feuilles se maintient au moins égal à 1 pendant toute la durée de leur conservation. On peut même affirmer qu'il dépasse cette valeur, puisqu'à l'ouverture des tubes on y trouve de l'oxygène, en quantité voisine de celles qu'ils renfermeraient s'ils étaient pleins d'air. Il faut voir là une confirmation de nos anciennes recherches sur la respiration végétale, qu'il convient de rapprocher des travaux de M. Schlœsing fils sur les échanges gazeux qui se produisent entre une plante entière et l'atmosphère dans laquelle on la maintient confinée.

Les faits qui viennent d'être décrits n'ont encore été reconnus que chez le seul *Aucuba*; sans doute on en observera de semblables avec d'autres plantes convenablement choisies, mais il faut bien se garder de généraliser. La conservation de certaines feuilles, dans les mêmes conditions, ne dure que quelques semaines et même parfois quelques jours. Pourquoi ces différences, pourquoi n'y a-t-il pas toujours équilibre entre la fonction chlorophyllienne et la fonction respiratoire d'une feuille détachée et pourquoi, en particulier, les chloroplastes se maintiennent-ils intacts chez telle espèce alors qu'ils se décolorent rapidement chez telle autre? Autant de questions auxquelles il est impossible actuellement de répondre et que de nouvelles recherches pourront seules élucider. C'est, comme l'ont fait remarquer MM. Dangeard en terminant l'exposé de leur travail, un vaste champ d'études qui s'ouvre aux investigations.

BACTÉRIOLOGIE. — *Sur la vaccination contre le charbon symptomatique par les toxines*. Note de MM. **E. Leclainche** et **H. Vallée**.

Dès 1888, E. Roux indique qu'il est possible d'immuniser contre le charbon symptomatique par l'inoculation sous-cutanée de la sérosité virulente récoltée sur des cadavres et filtrée sur porcelaine ([1]), fait qui fut confirmé

([1]) E. Roux, *Annales de l'Institut Pasteur*, 1888, p. 49.

par les recherches de Duenschmann. Celles de Schöbl, auquel on attribue illégitimement la découverte de ce principe, n'ajoutent rien au mérite de cette démonstration.

Nos recherches sur l'obtention de cultures pures du *B. Chauvœi* et sur leur toxicité, les travaux ultérieurs de Grassberger et Schattenfroh, les tentatives d'application de Nitta devaient conduire à l'utilisation systématique de la vaccination par cultures filtrées, alors que, pour des raisons qui nous échappent, il n'apparaissait point possible aux producteurs d'obtenir des virus-vaccins réellement atténués, selon le procédé que nous avons fait connaître ici même en 1913 (1).

Il ne semble pas que les tentatives de vaccination par les toxines du *B. Chauvœi*, réalisées en divers pays, se soient toujours inspirées de l'étude systématique du poison sécrété par ce germe.

Pour qui connaît les conditions intimes de la filtration sur parois minérales, celles de la rétention et de l'adsorption des substances actives des humeurs par les bougies filtrantes, il est permis de douter que l'utilisation comme antigène des sérosités virulentes mérite la préférence sur celle de cultures liquides en milieux appropriés, pauvres en albumines dissoutes et d'une plus évidente toxicité.

Mais les cultures toxiques elles-mêmes ne doivent point être soumises sans discernement à la filtration et la valeur des toxines qu'on en obtient par ce traitement peut varier en des limites étendues.

Ainsi que nous l'avons montré dès 1900, *B. Chauvœi* sécrète dans les cultures liquides, dès la vingt-quatrième heure, une toxine capable de tuer immédiatement diverses espèces animales par injection intra-veineuse — fait nouveau à cette époque, où l'on ne connaissait que des toxines microbiennes à incubation — mais confirmé depuis, aussi bien pour la bactérie du charbon symptomatique que pour les toxines de divers autres anaérobies (2).

Selon que l'on utilise, pour la culture, du bouillon de Martin, des milieux additionnés de divers sucres, du bouillon de foie, la toxicité initiale de la culture disparaît plus ou moins rapidement. Avec le vieillissement des cultures et la lyse spontanée des corps microbiens, consécutive à la sporulation, le milieu récupère une toxicité d'une nouvelle forme qui se traduit par le fléchissement de l'activité du poison foudroyant et la production de poisons

(1) E. Leclainche et H. Vallée, *Comptes rendus*, t. 156, 1913, p. 989.

(2) Leclainche et Vallée, *Annales de l'Institut Pasteur*, 1900, p. 202.

à action locale dont les effets se traduisent, notamment, par la formation d'une escharre.

Il nous a paru que, pour l'immunisation des organismes par les toxines, c'est à ces deux formes de la toxicité qu'il convenait d'avoir recours et la méthode semble condamnable qui ne fait appel, pour la vaccination, qu'à des produits de cultures filtrées à la 24e heure de leur développement ou aux filtrats de cultures de 5 à 8 jours.

Nous ne reviendrons pas ici sur les faits, par nous publiés, relatifs à la toxicité des cultures en divers milieux et à diverses époques de leur développement. Il nous suffit de rapporter en cette Note des expériences poursuivies sur la toxicité des extraits de corps microbiens du *B. Chauvœi* et sur leur pouvoir immunisant.

Au cinquième jour de leur développement, alors que la lyse partielle de *B. Chauvœi* libère dans le bouillon des cultures des substances toxiques de seconde extraction, un reliquat abondant de corps microbiens persiste qui, après centrifugation, donne, pour 1 litre de véhicule, un poids de corps microbiens allant jusqu'à 4^{g}.

Si on laisse vieillir la culture, pour obtenir la libération plus complète des poisons inclus, on assiste au fléchissement progressif de la toxicité, la quantité des substances actives libérées demeurant inférieure, sans doute, à celle qui se trouve détruite.

Il importe donc, si l'on entend ne rien perdre de la masse totale des poisons cellulaires, de séparer le bouillon des corps microbiens, alors qu'il présente son maximum de toxicité, d'assurer la conservation de celle-ci à l'abri de l'air et de la lumière, au frigorifique, et, reprenant les corps microbiens de centrifugation, d'en extraire d'un seul coup les poisons inclus pour les incorporer ensuite au tout.

Nous avons eu recours dans ce but à la méthode de Rowland, déjà utilisée par MM. Nicolle, Frasey, Debains et Nicolas pour l'extraction des endotoxines de diverses bactéries aérobies. Quatre grammes de sédiments de cultures, provenant de variétés très toxinigènes ([1]) de la bactérie du charbon symptomatique, sont intimement mélangés et broyés avec 10^{g} de sulfate de soude anhydre. La poudre obtenue est ensuite intégralement desséchée à l'abri de la lumière, dans le vide, en présence d'acide sulfurique.

La totalité du produit desséché, redissous dans 500^{cm^3} d'eau distillée,

---

([1]) Toutes les races de *B. Chauvœi* ne produisent point des toxines d'égale activité. Nous avons relevé cette particularité et Grassberger et Schattenfroh insistent, de leur côté, sur le « polychimisme » du microbe.

donne une solution qui, centrifugée à très grande vitesse, se révèle encore louche, d'apparence dichroïque et très riche en substances albuminoïdes.

Filtrée sur bougie Chamberland L/3, après supercentrifugation, la dilution se montre capable de provoquer chez le cobaye, à la dose de 1^{cm^3} injectée sous la peau, une réaction locale avec escharre. Étendue d'un égal volume d'eau, elle reste encore capable, à cette même dose, de vacciner le cobaye contre une inoculation virulente mortelle en 24 heures pour les témoins.

Si l'on mélange à des cultures jeunes de 24 à 48 heures l'extrait endotoxique de cultures de 3 à 5 jours, préparé en redissolvant dans un minimum d'eau distillée la poudre sulfatée sodique, on obtient un complexe toxique résumant la totalité des poisons sécrétés aux divers âges par le *B. Chauvœi* dans ses cultures. Le mélange réalisé, filtré sur bougie L après supercentrifugation, constitue un antigène total, incomparablement mieux approprié à la vaccination que des produits recueillis soit au début de la pullulation microbienne, soit seulement sur sa fin.

Quel que soit l'intérêt d'un tel procédé, il n'apparaît point que la vaccination contre le charbon symptomatique à la faveur des toxines et aggressives représente une méthode préférable à toutes autres. L'immunité conférée n'est pas acquise plus rapidement que celle obtenue par l'inoculation des virus atténués et la méthode ne dispense pas, en milieu contaminé, de la prudente et économique intervention de la sérothérapie. Les résultats de Grassberger et Schattenfroh, ceux de divers auteurs américains, démontrent en outre que la résistance conférée n'est point toujours suffisante (¹).

Au surplus, il est aisé de constater que la vaccination du cobaye par virus atténués est toujours supérieure en ce qui regarde le vibrion septique, le *B. Chauvœi* et divers bacilles parasymptomatiques, dont l'étude sera incessamment publiée, à l'immunisation par les toxines. Celle-ci d'ailleurs se prête mal à la vaccination polyvalente que nous réalisons aisément avec des virus-vaccins.

La vaccination par les toxines nous paraît donc devoir être réservée, jusqu'à plus ample informé, à la seule prophylaxie des enzooties des charbons parasymptomatiques qui s'observent en diverses régions et dont l'agent spécifique se prête irrégulièrement à l'atténuation.

(¹) 78 animaux non protégés sur 4500 vaccinés; 14 pour 100 des traités non immunisés en une autre observation.

ÉLECTROMÉCANIQUE. — *Détermination, en fonction des conditions initiales, des oscillations libres des alternateurs fonctionnant en parallèle et entraînés individuellement par des moteurs à régulation théorique instantanée et bloquée aussitôt. Application aux moteurs synchrones.* Note [1] de M. A. **Blondel.**

Dans deux Notes antérieures [2], j'ai exposé le calcul des oscillations libres des alternateurs accouplés en parallèle sur un réseau à tension constante, et les conditions de stabilité de leur marche synchronique. En tenant compte des phénomènes complexes de la réaction d'induit sur les inducteurs et sur les circuits amortisseurs, du compoundage et des variations cinétiques de tension des excitatrices, on a montré que les oscillations de très petite amplitude se traduisent par une équation différentielle linéaire du quatrième degré. Celle-ci peut s'abaisser au troisième degré, ou même au second degré, suivant les simplifications admises dans certains cas.

Je me propose, dans ce qui suit, de déterminer la solution du régime oscillatoire libre [3] dans le cas général en fonction des conditions initiales, et en supposant, pour simplifier, que le régulateur du moteur mécanique qui entraîne chaque alternateur prend, lorsque se produit un déséquilibre brusque de la charge, instantanément et sans oscillations, une position correspondant au régime final (ce serait par exemple le cas d'un régulateur poussé à la main). On se limitera au cas d'un groupe électrogène déréglé pour son propre compte par rapport à un réseau de grande puissance [4].

Dans le cas le plus général (équation caractéristique du quatrième degré), l'oscillation des écarts résulte de la superposition de deux oscillations apériodiques et d'une oscillation périodique. Pour que le régime soit stable, toutes ces oscillations composantes doivent être amorties; c'est ce qu'on supposera dans ce qui suit.

L'écart angulaire θ autour d'un mobile animé de la vitesse moyenne

---

[1] Contenue dans un pli cacheté reçu dans la séance du 26 avril 1920, enregistré sous le n° 8756 et ouvert dans la séance du 22 janvier 1923.

[2] *Comptes rendus*, t. 168, 1919, p. 439 et 587.

[3] *Loc. cit.*, p. 587.

[4] Le cas où l'on n'a affaire qu'à deux alternateurs seulement accouplés en parallèle sur un réseau à *tension constante* se ramène à celui-là, en remarquant que pendant les oscillations de vitesse la charge se balancera entre les deux alternateurs exactement comme si chacun d'eux était couplé seul sur un réseau de puissance infinie.

pourra se représenter graphiquement, en fonction du temps porté en abscisses, par la superposition de trois courbes, deux exponentielles amorties et une oscillation amortie; partant d'une valeur θ_0 à l'instant $t = 0$ de la variation brusque de charge, il tendra vers zéro en décrivant une courbe résultante représentée algébriquement par l'équation suivante, où x_1, x_2, x_3, x_4 sont les quatre racines de l'équation caractéristique

$$(1) \qquad \theta = \Theta_1 e^{x_1 t} + \Theta_2 e^{x_2 t} + \Theta_3 e^{x_3 t} + \Theta_4 e^{x_4 t}.$$

Pour obtenir les quatre constantes d'intégration Θ_1, Θ_2, Θ_3, Θ_4, il faut établir quatre équations entre les valeurs de θ_0 et de ses trois premières dérivées déterminées, pour le régime initial, par les conditions physiques du problème, en tenant compte de la construction de l'alternateur, et des réactions de l'induit sur les inducteurs.

On remarquera tout d'abord que l'écart angulaire initial θ_0 peut être considéré comme une donnée, une fois que l'on a déterminé, par un calcul préalable de la machine ou par l'expérience, les variations de puissance en fonction des variations d'écart; on se donne ici la différence entre la puissance initiale et la puissance finale à fournir par l'alternateur et l'on en déduit inversement l'écart angulaire du régime initial par rapport au régime final [1].

La dérivée première θ'_0 qui est la vitesse d'oscillation angulaire à l'instant $t = 0$ est évidemment nulle par raison de continuité, ainsi que les dérivées des courants de l'induit I_d et I_t.

On ne peut calculer les dérivées seconde et troisième au début de l'oscillation qu'en tenant compte des valeurs que prennent à ce moment les courants induits dans les deux circuits *d'inducteurs* définis antérieurement.

Dans le cas ordinaire, le circuit *amortisseur* (mt) n'ayant pas d'excitation séparée n'est parcouru par aucun courant au moment où commence l'oscillation; et la dérivée de ce courant au temps $t = 0$ est nulle par raison de continuité. Il en est de même pour le circuit inducteur *excitateur* (md) quand l'alternateur n'est pas muni d'une excitatrice compoundeuse; au contraire, dans le cas de compoundage, le courant excitateur I_{md}, influencé par la réaction sur l'excitatrice, prendra une valeur qui dépend de la charge; il y a donc entre la valeur initiale et la valeur finale du courant d'excitation une différence qui se fait sentir au début de l'oscillation.

---

[1] On désigne par ζ l'angle d'écart de la tension U par rapport à l'axe direct ou axe des pôles. Par conséquent en désignant par ζ_1 l'écart final correspondant à la puissance finale, l'angle θ est égal à $\zeta - \zeta_1$; et θ_0 est égal à $\zeta_0 - \zeta$. Dans la notation de mes précédentes Notes, on a aussi $\theta = \mathfrak{B}(\zeta)$.

Posons les simplifications d'écriture suivantes :

$$(2)\qquad \begin{cases} \mathcal{D}(\mathrm{I}) = i\dfrac{d}{dt}\mathcal{D}(\mathrm{I}) = i', \quad \dfrac{d\theta}{dt} = \theta', \quad \dfrac{d^2\theta}{dt^2} = \theta'', \quad \dfrac{d}{dt}\Pi = \Pi', \\ \dfrac{d}{dt}\mathrm{V} = \mathrm{V}', \quad \xi = \dfrac{h}{\omega^2 q}\mathrm{E}^2. \end{cases}$$

L'équation (2 *bis*) de ma Note antérieure [1] et sa dérivée s'écrivent alors, pour les oscillations libres,

$$(3)\qquad \mathrm{K}'\theta'' - \xi\theta' + \Pi\theta + \mathrm{V}_d i_d + \mathrm{V}_t i_t = 0;$$

$$(4)\qquad \mathrm{K}'\theta''' - \xi\theta'' + \Pi\theta' + \mathrm{V}_d i'_d + \mathrm{V}_t i'_t + \theta\Pi' + i_d\mathrm{V}'_d + i_t\mathrm{V}'_t = 0.$$

Les équations (8) et (9) de la même Note donnent, après avoir subi l'opérateur $\mathcal{D}$, les équations aux petites variations :

$$(5)\qquad \mathrm{R}_{md}\, i_{md} + \mathrm{L}_{md}\, i'_{md} + \mathrm{M}_d\, i'_d = \frac{\mathrm{E}_{md}}{\omega}\theta' - \mathrm{B}_d\, i_d;$$

$$(6)\qquad \mathrm{R}_{mt}\, i_{mt} + \mathrm{L}_{mt}\, i'_{mt} + \mathrm{M}_t\, i'_t = \frac{\mathrm{E}_{mt}}{\omega}\theta' - \mathrm{B}_t\, i_t.$$

De même, l'ancienne équation (14) et sa symétrique s'écrivent, en négligeant les termes en r (toujours petits) pour simplifier :

$$(7)\qquad \omega\mathrm{L}_d i_d + \omega\mathrm{M}_d i_{md} = \mathrm{U}_d\theta + \frac{\mathrm{E}_t}{\omega}\theta';$$

$$(8)\qquad \omega\mathrm{L}_t i_t + \omega\mathrm{M}_t i_{mt} = \mathrm{U}_t\theta - \frac{\mathrm{E}_d}{\omega}\theta'.$$

Ces dernières donnent encore, en les dérivant par rapport à t (en désignant par un indice les dérivées de E_t et E_d), les deux autres équations :

$$(9)\qquad \omega\mathrm{L}_d i'_d + \omega\mathrm{M}_d i'_{md} = \mathrm{U}_d\theta' + \frac{\mathrm{E}_t}{\omega}\theta'' + \mathrm{U}_t\theta\theta' + \frac{\mathrm{E}'_t}{\omega}\theta';$$

$$(10)\qquad \omega\mathrm{L}_t i'_t + \omega\mathrm{M}_t i'_{mt} = \mathrm{U}_t\theta' - \frac{\mathrm{E}_d}{\omega}\theta'' - \mathrm{U}_d\theta\theta' - \frac{\mathrm{E}'_d}{\omega}\theta'.$$

Pour le régime initial ($t = 0$), on a, d'après les explications données plus haut,

$$(11)\qquad \theta = \theta_0, \quad \theta'_0 = 0, \quad \theta''_0 \neq 0; \quad (i_{mt})_0 = 0, \quad (i_{md})_0 \neq 0;$$

---

[1] *Comptes rendus*, t. 168, 1919, p. 439.

et l'on trouve aisément (¹) que

$$\Pi'_0 = 0, \qquad (V'_d)_0 = 0, \qquad (V'_t)_0 = 0.$$

Substituons dans les équations (3) à (10) et éliminons, tout d'abord, $(i_d)_0$ et $(i_t)_0$ entre les équations (3), (7) et (8). On en déduit :

$$(3\ bis)\qquad K'\theta''_0 + \left[\Pi + \frac{V_d U_d}{\omega h_d} + \frac{V_t U_t}{\omega h_t}\right]\theta_0 - V_d \frac{M_d}{h_d}(i_{md})_0 = 0.$$

La parenthèse n'est autre chose que le couple élastique C_e. L'élimination de $(i_d)_0$, $(i_t)_0$, $(i'_d)_0$, $(i'_t)_0$, $(i'_{md})_0$, $(i'_{mt})_0$ entre les équations (4) à (10) donne ensuite, tous calculs faits (les nouveaux symboles ayant mêmes significations que dans nos précédentes Notes),

$$(4\ bis)\qquad K'\theta'''_0 + \left[\frac{V_d}{\sigma_d \omega L_d}\frac{E_t}{\omega} - \frac{V_t}{\sigma_t \omega L_t}\frac{E_d}{\omega} - \xi\right]\theta''_0$$
$$+ \left[\frac{V_d U_d}{\sigma_d \omega L_d} k_d m_d + \frac{V_t U_t}{\sigma_t \omega L_t} k_t m_t\right]\theta_0 + \frac{V_d}{\sigma_d \omega L_d} k'_d m_d (i_{md})_0 = 0.$$

Dans les alternateurs ordinaires, k_t est toujours nul, car il n'y a pas de compoundage dans le circuit d'excitation transversal ; il n'a été introduit ici que par raison de symétrie.

Supposons donnés θ_0 et $(i_{md})_0$. On calculera θ''_0 et θ'''_0 par (3 *bis*) et (4 *bis*); on voit que le courant compoundé i_{md} intervient dans la valeur de ces deux données initiales.

D'autre part, de l'équation (1) et de ses trois premières dérivées, on déduit le Tableau suivant, écrit, pour le régime initial ($t = 0$) :

$$(12)\qquad \left\{\begin{array}{l} \theta_0 = \Theta_1 + \Theta_2 + \Theta_3 + \Theta_4, \\ \theta'_0 = x_1\Theta_1 + x_2\Theta_2 + x_3\Theta_3 + x_4\Theta_4, \\ \theta''_0 = x_1^2\Theta_1 + x_2^2\Theta_2 + x_3^2\Theta_3 + x_4^2\Theta_4, \\ \theta'''_0 = x_1^3\Theta_1 + x_2^3\Theta_2 + x_3^3\Theta_3 + x_4^3\Theta_4, \end{array}\right.$$

ce qui détermine les cofficients Θ. La solution peut être obtenue, par exemple, sous forme de déterminants.

Supposons que l'oscillation périodique amortie soit représentée par les deux derniers termes de (1). On passe ensuite de la forme exponentielle de

(¹) Dans l'hypothèse que les variations de courant ne sont pas brutales, mais continues. Ces expressions se vérifient en développant Π', V' et en faisant $(I'_t) = 0$ et $(I'_d) = 0$.

ces termes où $x_3 = -\alpha + j\beta$ et $x_4 = -\alpha - j\beta$ à la forme habituelle suivante :

(13) $$A_e^{-\alpha t}\cos(\beta t - \varphi)$$

par les relations de transformation, faciles à établir :

(14) $$\begin{cases} A = \sqrt{2(\Theta_3^2 + \Theta_4^2)}, \\ \operatorname{tang}\varphi = \dfrac{\Theta_3 - \Theta_4}{\Theta_3 + \Theta_4}. \end{cases}$$

Le problème posé est ainsi entièrement résolu et la solution numérique peut être obtenue.

Dans le cas d'un alternateur non compoundé, les équations (3 *bis*) et (4 *bis*) se simplifient notablement, par le fait qu'on a

$$k_d = 0 \quad \text{et} \quad (i_{md})_0 = 0;$$

elles se réduisent ainsi aux deux suivantes (3 *ter*) et (4 *ter*) :

(3 *ter*) $$\theta_0'' = -\frac{C_e\theta_0}{K'},$$

équation qui était évidente, *a priori*, puisqu'elle exprime l'égalité, au signe près, entre le couple d'inertie et le couple élastique ; et

(4 *ter*) $$\theta_0''' = \frac{C_e\theta_0}{K'^2}\left[\frac{V_d}{\sigma_d\omega L_d}\,\frac{E_t}{\omega} - \frac{V_t}{\sigma_t\omega L_t}\,\frac{E_d}{\omega} - \xi\right].$$

On voit que les courants dans les inducteurs n'interviennent plus alors que dans la détermination de θ_0''' par les facteurs $\sigma_t L_t$ et $\sigma_d L_d$.

Remarques. — 1° La solution du problème qu'on vient de traiter s'étend immédiatement aux oscillations d'un moteur synchrone actionnant un organe dont le couple résistant subit une variation brusque. Les équations générales sont, en effet, applicables par simple changement du signe des courants I_d et I_t et des puissances P et Π. Le régime initial $(I_t)_0$ et $(I_d)_0$ est déterminé par la puissance résultante et par les conditions d'alimentation du moteur; de même le décalage initial ζ_0 et le décalage final ζ correspondent aux charges initiale et finale ; θ_0 est la différence $(\zeta - \zeta_0)$.

2° On peut exprimer la condition d'apériodicité complète des oscillations au moyen du discriminant de l'équation caractéristique du quatrième degré (équation donnée dans ma précédente Note), discriminant dont

l'expression est bien connue en fonction des coefficients de cette équation [1]. En général, il y a deux racines imaginaires si le discriminant est positif. On a vu, d'autre part, par les conditions physiques du problème, qu'il y a toujours forcément deux racines réelles correspondant à l'effet des courants induits dans les inducteurs; pour qu'il n'y ait aucune racine imaginaire, il suffit donc que le discriminant soit positif.

On a vu antérieurement la condition à remplir pour qu'aucune des quatre racines réelles ne soit positive et ne puisse donner lieu, par conséquent, à une oscillation divergente.

SPECTROSCOPIE. — *Observations sur la structure du spectre du chrome.* Note de M. **A. de Gramont.**

Dans une Note présentée à la séance du 27 novembre dernier [2] confirmant et complétant une Communication antérieure [3], j'ai fait connaître que les raies ultimes de l'étincelle et de l'arc appartiennent à *des séries principales dont elles forment les premiers termes*, et j'ai donné des tableaux numériques à l'appui. Bien que la structure du spectre du chrome fût encore inconnue, et me fondant sur l'analogie étroite entre ce spectre et celui du manganèse, j'ai indiqué que les deux triplets de raies ultimes du chrome, l'un indigo {4289,72; 4274,80; 4254,34} correspondant à l'atome neutre, et l'autre ultraviolet {3605,33; 3593,48; 3578,68} correspondant à l'atome ionisé (+) appartiendraient à des séries principales. Cette prévision a été réalisée par une intéressante Note de M. M. Catalan, qui, dans

(1) Étant données la complication de l'expression du discriminant et celle des coefficients de l'équation caractéristique, il paraît sans intérêt de donner ici le développement des calculs. L'objet de la remarque qu'on vient de faire est seulement de montrer que *l'on ne peut pas appliquer* aux oscillations des alternateurs la condition d'amortissement critique usuelle applicable aux oscillations périodiques simples, et que la question est beaucoup plus complexe.

On peut cependant simplifier le problème dans les applications numériques en séparant les racines x_1, x_2, x_3, x_4 (par la méthode de Newton, par exemple) et en divisant ensuite l'équation caractéristique par le produit $(x - x_1)(x - x_2)$; l'équation qui subsiste est alors une équation du second degré représentant l'oscillation périodique, et à laquelle on peut appliquer alors le calcul usuel du degré d'amortissement.

(2) *Comptes rendus*, t. 175, 1922, p. 1025.

(3) *Comptes rendus*, t. 151, 1910, p. 30.

la séance du 8 janvier dernier ([1]), a fait connaître la structure très complexe du spectre d'arc du chrome qui renferme plusieurs systèmes de séries. Or les raies qui forment les premiers termes ($m = 1$) des deux séries principales sont bien les deux triplets de raies ultimes ci-dessus mentionnés que j'avais désignés à l'avance. Je me permets d'attirer l'attention sur ce fait à l'appui de mes conclusions : la connaissance des raies ultimes pourrait être utilisée avec avantage pour la recherche des séries, inconnues encore pour la majorité des éléments.

GÉOMÉTRIE INFINITÉSIMALE. — *Sur les figures polaires réciproques par rapport à une sphère.* Note de M. C. GUICHARD.

Congruence. — Soient G une droite qui décrit une congruence rapportée à ses développables; la droite G′ polaire réciproque de G se trouve dans le plan P mené par le centre O de la sphère perpendiculairement à G. Ce plan P enveloppe ce que j'ai appelé un *réseau point;* les tangentes de ce réseau sont les perpendiculaires menées par O aux plans focaux de G. La congruence G′ est harmonique à ce réseau point. Toute congruence harmonique à ce réseau point se transforme par polaire réciproque en une congruence parallèle à G et inversement.

En particulier, si la congruence G est O, le réseau point sera un réseau O; la congruence G′ sera une congruence C; donc

Toute congruence O *se transforme en une congruence* C.

Réseaux. — Soit M un point qui décrit un réseau; par le point O je mène une droite Δ perpendiculaire au plan tangent au réseau M; cette droite Δ décrit une *congruence point* orthogonale au réseau M; le pôle N du plan tangent à M se trouve sur Δ; ce point N décrit un réseau conjugué à Δ. Tous les réseaux parallèles à M se transforment en réseaux conjugués à Δ et inversement.

En particulier, si le réseau M est O, la congruence Δ sera une congruence O; le réseau N sera O ou 2O; il ne peut être O que si M décrit une sphère concentrique à la sphère choisie; en laissant de côté ces réseaux particuliers on peut dire :

Tout réseau O *se transforme en un réseau* 2O.

SYSTÈMES TRIPLEMENT INDÉTERMINÉS. — *Systèmes points.* — Soit M un point qui décrit un système triplement indéterminé; par l'origine O, centre de la

([1]) *Comptes rendus*, t. 176, 1923, p. 84.

sphère, je mène les droites $O\delta_1$, $O\delta_2$, $O\delta_3$ perpendiculaires aux plans focaux de M; ces droites sont les tangentes d'un système point *réduit à l'origine*, orthogonal au réseau M. Cela posé, le plan polaire P du point M décrit un système plan dont les points focaux sont situés sur les droites $O\delta_1$, $O\delta_2$, $O\delta_3$. Ce système plan est donc *assemblé* au système point réduit à l'origine. Tout système plan assemblé à ce système point admet pour polaire réciproque un système point parallèle à M et inversement.

En particulier, si le système M est O, il en est de même du système point réduit à l'origine; le plan P engendre un système Ω, donc

Tout système point O *se transforme en un système plan* Ω.

Systèmes droites. — Soit D une droite qui décrit un système triplement indéterminé. Par le point O je mène les droites $O\delta_1$, $O\delta_2$, $O\delta_3$, perpendiculaires aux plans focaux de D. Ces trois droites sont situées dans un même plan P orthogonal à D; ce plan P engendre un système plan *réduit à l'origine* ayant pour droites focales les trois droites $O\delta_1$, $O\delta_2$, $O\delta_3$.

La polaire réciproque Δ de D est située dans le plan P, ses points focaux sont sur les droites $O\delta_1$, $O\delta_2$, $O\delta_3$. Le système Δ est donc assemblé au système plan réduit à l'origine.

En particulier, si le système D est 3I, le système plan orthogonal est Ω et par suite Δ décrit un système C, donc

Tout système 3I *se transforme en un système* C.

Systèmes plans. — Soient P un plan qui engendre un système, Δ la droite menée par l'origine perpendiculairement au plan P; cette droite Δ décrit un système droite *réduit à l'origine*. En raisonnant, comme dans les cas précédents, on voit que le système point qui correspond à P est assemblé à Δ.

Applications. — Les remarques bien simples qui précèdent permettent de résoudre facilement un très grand nombre de problèmes sur les figures polaires réciproques. J'indique les exemples suivants :

1° *Trouver les congruences de normales qui se transforment en congruences de normales.*

Soient G et G′ deux congruences O polaires réciproques; puisqu'une congruence O se transforme en une congruence C les congruences G et G′ doivent être à la fois O et C. On est donc ramené à la recherche des surfaces à courbure totale constante. Les congruences cherchées sont des congruences que j'ai rencontrées à plusieurs reprises, elles possèdent cette propriété caractéristique. *Les droites qui joignent l'origine aux centres de courbure sont rectangulaires.*

2° *Trouver deux surfaces polaires réciproques telles qu'à une famille de géodésiques de la première corresponde sur la seconde une famille de lignes de courbure.*

Soient G et M les points qui se correspondent sur la première et la seconde surface, j'adjoins aux courbes mises en évidence sur ces surfaces leurs trajectoires conjuguées; je forme ainsi deux réseaux (G) et (M); je suppose que les familles considérées sur les deux surfaces soient les premières courbes ($V = C^{\omega}$) de ces réseaux. La première tangente du réseau G est une congruence O; elle admet pour polaire réciproque la seconde tangente du réseau M; cette seconde tangente doit donc décrire une congruence C. Ainsi le réseau M est un réseau O dont une congruence focale est C. On est donc ramené à un problème connu. Ce problème est du troisième ordre, mais on en connaît des solutions particulières qui ne dépendent que d'une fonction arbitraire. On pourra obtenir les surfaces correspondantes sous forme finie. On peut remarquer que le réseau G étant polaire réciproque du réseau M est un réseau 2O.

3° *Trouver les systèmes triple* 3I *qui se transforment en un système* 3I.

Soient G et G′ deux droites polaires réciproques qui décrivent des systèmes triple 3I. Comme un système 3I se transforme en un système C, les systèmes G et G′ sont à la fois 3I et C. En partant de pareils systèmes on arrive facilement à la solution du problème posé.

Ces systèmes 3I, C se rattachent à des systèmes triple-orthogonaux que j'ai étudiés dans mon Mémoire « Sur les systèmes triplement indéterminés et sur les systèmes triple-orthogonaux » (*Collection Scientia*, Chap. IX).

CHIMIE PHYSIQUE. — *Sur la chaleur d'oxydation des métaux alcalino-terreux.* Note de MM. A. **Guntz** et **Benoit**.

Dans la bibliographie, on trouve pour la chaleur d'oxydation du calcium des nombres fort peu concordants : c'est ainsi que Thomsen donne $+ 135^{cal}$, Moissan $+ 145^{cal}$, Guntz et Bassett $+ 151^{cal},9$, Muthmann et Metzger $+ 160^{cal},2$, Copaux et Philipps $+ 158^{cal},7$.

Pour choisir entre ces différentes valeurs, nous avons, M. Benoit et moi, cru nécessaire de répéter avec le plus grand soin nos anciennes mesures.

Nous avons trouvé pour la chaleur de dissolution du calcium pur (Ca pour 100, 99,6) dans l'acide chlorhydrique étendu le nombre $129^{cal},8$, qui permet de calculer la chaleur d'oxydation cherchée :

$$\text{Ca sol.} + \text{O gaz} = \text{CaO sol.} + 152^{cal},7.$$

Ce résultat confirme nos anciennes expériences. Dans un Mémoire détaillé nous indiquerons les causes des résultats discordants cités plus haut.

Ayant eu l'occasion de préparer de grandes quantités de strontium et de baryum purs, nous avons repris également nos anciennes déterminations calorimétriques faites sur des métaux assez impurs.

Nous avons dissous du strontium pur (Sr pour 100, 99,80) dans de l'acide chlorhydrique étendu en tenant compte de la chaleur spécifique de cette dissolution; nous avons trouvé ainsi

$$\text{Sr sol.} + 2\,\text{HCl étendu} = \text{SrCl}^2 \text{ solution étendue} + \text{H}^2 \text{ sec} + 130^{\text{cal}},2,$$

130,2 étant la moyenne de trois déterminations concordantes.

En tenant compte de la chaleur de dissolution de SrO dans HCl étendu, mesurée par M. de Forcrand, on en déduit pour la chaleur d'oxydation du strontium :

$$\text{Sr sol.} + \text{O gaz} = \text{SrO sol.} + 141^{\text{cal}},8.$$

M. Roederer et moi avions trouvé autrefois $+ 141^{\text{cal}},2$.

Pour le baryum, les nombres ont été les suivants :

$$\text{Ba sol.} + 2\,\text{HCl étendu} = \text{BaCl}^2 \text{ solution étendue} + \text{H}^2 \text{ sec} + 128,46.$$

En tenant compte de la chaleur de dissolution de BaO dans HCl, on calcule que

$$\text{Ba sol.} + \text{O gaz} = \text{BaO sol.} + 134^{\text{cal}},04.$$

Le baryum était pur : les analyses ont donné Ba 99,77 pour 100. Nous avions trouvé autrefois, avec un métal contenant 3 pour 100 d'impuretés, pour la réaction de Ba sur HCl solution étendue $+ 120^{\text{cal}},28$. Si cependant nos nouvelles expériences donnent sensiblement la même chaleur d'oxydation du baryum, cela tient à une compensation produite par l'adoption, pour la dissolution de la baryte anhydre dans l'acide chlorhydrique étendu, du nombre de M. de Forcrand.

En résumé, nous proposons d'admettre comme chaleur d'oxydation des métaux alcalino-terreux les nombres suivants :

$$\text{Ca} + \text{O} + 152^{\text{cal}},7, \qquad \text{Sr} + \text{O} + 141^{\text{cal}},80, \qquad \text{Ba} + \text{O} + 134^{\text{cal}},04.$$

On voit que ces nombres décroissent régulièrement avec l'augmentation du poids atomique.

GÉOLOGIE. — *Observations nouvelles sur la géologie de la Hague (Manche).* Note de M. A. Bigot et de Mme E. Jérémine.

L'étude détaillée de la région côtière de la Hague et des quelques affleurements et carrières de l'intérieur du pays nous a conduits à admettre que ni le Cambrien, ni le Silurien ne reposent sur leur substratum originel, formé par des roches éruptives ou par des gneiss et des schistes précambriens. Le contact des deux formations se fait toujours par une zone extrêmement broyée, dans laquelle on peut reconnaître les éléments des deux formations. Les surfaces de contact sont inclinées. Le broyage de la zone est certainement le résultat du déplacement réciproque des deux formations, mais il n'est pas possible d'évaluer l'importance du chevauchement, qui nous paraît dépendre plutôt d'une structure imbriquée de faible ampleur. Le parallélisme des deux masses déplacées ne permet pas non plus de déterminer le sens du mouvement.

Dans ces régions où le Cambrien et le Silurien sont en superposition anormale sur leur substratum, ils ne sont jamais traversés par les roches granitiques et ne présentent aucun phénomène de métamorphisme de contact. Toutefois, entre le sémaphore de Goury et le Diotret, les rochers littoraux montrent une alternance répétée de couches de grès et de bandes de granite, indiquant une digestion incomplète des grès. Ces grès ont été considérés jusqu'ici comme des grès cambriens métamorphiques, mais leur âge ne peut pas être établi avec certitude parce que tout cet ensemble, entre le sémaphore et le Diotret, est limité des deux côtés par une zone broyée.

Des conclusions nouvelles et intéressantes résultent aussi de notre étude des galets des conglomérats de la base du Cambrien. Ces galets sont composés de granites francs, de granites écrasés, de roches microgrenues avec sphérolites à étoilements micropegmatiques, de rhyolites et d'obsidiennes rhyolitiques, peut-être accompagnées de tufs.

Les roches microgrenues à étoilements sont caractéristiques des nombreux filons qui traversent les gneiss de la région. D'autre part les rhyolites des galets ressemblent à celles de Jersey (îles Anglo-Normandes). Leurs coulées ne sont pas conservées dans la région de la Hague, mais les nombreux filons de roches sphérolitiques qui coupent les gneiss et les granites à grands cristaux d'orthose correspondent vraisemblablement aux fissures de sortie de ces roches rhyolitiques.

Ainsi l'existence de roches à sphérolites et de rhyolites parmi les galets de la base du Cambrien paraît confirmer une fois de plus l'âge précambrien des rhyolites anciennes de Jersey. Elle établit l'âge précambrien des gneiss et du granite à grands cristaux d'orthose traversés par les filons rhyolitiques de la région de la Hague. La détermination de l'âge précambrien de ce granite est un fait nouveau, car on le rapprochait jusqu'ici du granite de Flamanville, métamorphisant le Dévonien.

D'autres résultats de cette étude doivent être signalés. Dans la partie orientale de l'Anse Saint-Martin commence un massif de granite à grands cristaux d'orthose. Ce granite contient des enclaves riches en amphibole. Il présente sur le rivage environ 1^{km} de longueur et s'étend sur plusieurs kilomètres dans l'intérieur du pays. L'abondance des enclaves est telle que par places la roche en est en grande partie composée, et qu'elles ne sont plus séparées les unes des autres que par de minces bandes de granite. Ces enclaves ont une composition de diorites ou de diorites quartziques à biotite, très riches en amphibole. Elles sont alignées, mais la direction de l'alignement n'est pas constante. Le granite à grands cristaux d'orthose qui les englobe contient aussi un peu d'amphibole.

La disposition des enclaves et leur composition minéralogique font songer à celles décrites par M. Lacroix dans les Pyrénées [1], comme phénomènes de métamorphisme de contact. Mais comme nous n'avons pas trouvé de contact avec les calcaires, il nous paraît prudent de supposer que ces enclaves pourraient être des ségrégations magmatiques, d'autant plus que ce massif granitique à enclaves est souvent coupé par des filons de même composition que les enclaves elles-mêmes.

Jusqu'ici on n'avait pas signalé de calcaires dans la région. Nous avons trouvé cette année, entre Eculleville et Nacqueville, intercalés dans la série précambrienne, de grandes lentilles et des bandes calcaires, ainsi que des schistes calcareux, chloriteux et sériciteux. Ces roches offrent des traces assez nettes de recristallisation et souvent aussi d'écrasement.

M. le Secrétaire perpétuel présente à l'Académie le Tome 8 de la première partie des *Bref och skrifvelser af och till* Carl von Linné, publiés par l'Université d'Uppsala.

---

[1] *Bull. Serv. Carte géol. France*, t. 10. 1889-1890.

Sir **J. J. Thomson**, par l'organe de M. G. Urbain, fait hommage à l'Académie, de la traduction, par MM. Fric et Corvisy, de la deuxième édition de son ouvrage : *Les rayons d'électricité positive et leur application aux analyses chimiques.*

M. **A. Balland** fait hommage à l'Académie d'un fascicule qu'il vient de publier sous le titre : *Les aliments de France et des Colonies; composition chimique, valeur alimentaire, tables d'analyses.*

ÉLECTIONS.

Par 42 suffrages, contre 2 à M. *Charles Jacob* et 2 à M. *Fernand de Montessus de Ballore*, M. **Philippe Glangeaud** est élu Correspondant pour la Section de Minéralogie, en remplacement de M. *Otto Lehmann*, décédé.

PRÉSENTATIONS.

Dans la formation d'une liste de deux candidats à la place de Membre titulaire vacante au Bureau des Longitudes par le décès de M. *Louis Favé*, M. **Eugène Fichot** est désigné pour la première ligne par 29 suffrages contre 22 à M. *Ludovic Driencourt*. Il y a 2 bulletins blancs.

Pour la seconde ligne, M. **Ludovic Driencourt** est désigné par 34 suffrages contre 7 à M. *Perrin*. Il y a 2 bulletins blancs.

En conséquence, la liste présentée à M. le Ministre de l'Instruction publique comprendra :

En première ligne . . . . . . M. **Eugène Fichot**
En seconde ligne. . . . . . . M. **Ludovic Driencourt**

PLIS CACHETÉS.

MM. **R. Basset, A. Blondel, E. Gau** demandent l'ouverture, le premier du pli cacheté n° 7209 accepté le 6 mai 1907; le deuxième du pli cacheté

n° 8756 accepté le 26 avril 1920; le troisième du pli cacheté n° 8917 accepté le 26 septembre 1921.

Ces plis, ouverts en séance par M. le Président, contiennent :

Le n° 7209, une Note intitulée : *Radio-télautographe;*

(Renvoyée à M. Paul Janet.)

Le n° 8756, deux Notes relatives, l'une à la détermination des constantes d'intégration des oscillations libres [1], l'autre au fonctionnement des alternateurs accouplés avec des turbines réglées par servo-moteur;

(Réservées pour être insérées dans les *Comptes rendus.*)

Le n° 8917, une *Note sur la méthode de Darboux pour l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendantes.*

(Renvoyée à M. E. Goursat.)

CORRESPONDANCE.

M. le **Secrétaire perpétuel** signale, parmi les pièces imprimées de la Correspondance :

A. Leduc. *Volumes moléculaires; applications.*

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur les moyennes doubles de Cesàro.* Note de M. **Erwand Kogbetliantz**, présentée par M. Appell.

Dans une de mes Notes, il y a plus de trois ans [2], j'ai considéré les doubles moyennes typiques qu'on obtient en appliquant le procédé de sommation de M. Riesz d'ordre γ non à la suite des sommes partielles s_0, $s_1, \ldots, s_n, \ldots$, mais à la suite de leurs moyennes typiques d'ordre δ. Dans cette Note, j'ai établi l'équivalence complète de ce procédé $(R, \lambda, \delta)(R, \lambda, \gamma)$ de double sommation avec le procédé ordinaire de M. Riesz $(R, \lambda, \delta + \gamma)$,

---

(1) Voir page 211.

(2) *Comptes rendus*, t. 168, 1919, p. 1090.

de même type λ et d'ordre $\delta+\gamma$ à l'aide du développement de la double moyenne d'ordres γ, δ, suivant les moyennes simples d'ordres

$$\delta+\gamma+n \qquad (n=0, 1, 2, \ldots, \infty)$$

et à l'aide du développement inverse de la moyenne simple d'ordre $\delta+\gamma$ suivant les moyennes doubles d'ordres $n+\gamma$, δ $(n=0, 1, 2, \ldots, \infty)$.

Dans la présente Note, on trouvera les développements analogues des moyennes arithmétiques de Cesàro. Ces développements nous permettent d'établir en toute rigueur le théorème suivant :

La série divergente sommable $(C, \delta+\gamma)$, *où* $\delta>0$ *et* $\gamma>0$, *est aussi sommable avec la même somme par l'application du procédé* (C, δ) *aux moyennes arithmétiques d'ordre* γ [*ou du procédé* (C, γ) *aux moyennes d'ordre* δ] et vice versa : *la série sommable par la double application du procédé Cesàro d'ordre* $\delta>0$ *et puis d'ordre* $\gamma>0$ *est aussi sommable* $(C, \delta+\gamma)$ *avec la même somme.*

En exprimant l'équivalence de deux procédés de sommation au point de vue de sommabilité des séries divergentes par le signe $\sim$, nous avons donc à démontrer qu'on a pour $\delta>0$ et $\gamma>0$,

$$\text{(I)} \qquad (C, \delta)(C, \gamma) \sim (C, \delta+\gamma) \sim (C, \gamma)(C, \delta) \qquad (\delta>0, \gamma>0).$$

En comparant (I) avec la propriété correspondante des moyennes typiques de M. Riesz,

$$\text{(II)} \qquad (R, \lambda, \delta)(R, \lambda, \gamma) \sim (R, \lambda, \delta+\gamma) \sim (R, \lambda, \gamma)(R, \lambda, \delta) \qquad (\delta>0, \gamma>0),$$

établie en 1919 [1], on voit la nécessité d'une démonstration directe de (I) quoique pour $\lambda_n \equiv n$ on a $(R, n, \delta) \sim (C, \delta)$. En effet, en posant $\lambda_n \equiv n$, on ne peut déduire de (II) que

$$(C, \delta+\gamma) \sim (R, n, \delta)(C, \gamma) \quad \text{ou} \quad (C, \delta+\gamma) \sim (R, n, \gamma)(C, \delta),$$

mais en aucun cas (I), puisqu'on ne savait pas jusqu'à maintenant si l'équivalence $(R, n, \delta)(R, n, \gamma) \sim (C, \delta)(C, \gamma)$ avait lieu ou non. Ce n'est qu'en combinant (I) et (II) qu'on peut maintenant en déduire le corollaire en question :

$$(R, n, \delta)(R, n, \gamma) \sim (R, n, \delta+\gamma) \sim (C, \delta+\gamma) \sim (C, \delta)(C, \gamma).$$

Le théorème (I) permet d'établir le théorème d'équivalence de deux définitions (de Hölder et de Cesàro) de la moyenne arithmétique d'un

(1) *Loc. cit.*

ordre entier $k=E(k)$ en deux mots. La méthode de Hölder, (H, k), n'est que $(C, 1)^k$ par définition. Supposons établie l'équivalence

$$(C, 1)^m \sim (C, m)$$

de deux méthodes pour $k=m$ et posons dans (I) $\gamma=m$ et $\delta=1$. On a

$$(H, m+1) \equiv (C, 1)^{m+1} \equiv (C, 1)(C, 1)^m \sim (C, 1)(C, m) \sim (C, m+1)$$

et *vice versa*. Or, on a $(C, 1) \sim (H, 1)$, donc $(H, k) \sim (C, k)$ quel que soit l'entier k, ce qui prouve que (I) contient ce théorème d'équivalence comme un cas très particulier pour γ et δ entiers.

Pour démontrer (I), formons les fonctions génératrices

$$S(z)=\sum_{n=0}^{\infty} s_n z^n, \qquad S^{(\delta)}(z)=\sum_{n=0}^{\infty} s_n^{(\delta)} z^n \qquad \text{et} \qquad \bar{S}^{(\gamma,\delta)}(z)=\sum_{n=0}^{\infty} S_n^{(\gamma,\delta)} z^n$$

des sommes partielles, s_n, des moyennes simples d'ordre δ, $s_n^{(\delta)}$, et des moyennes doubles, $S_n^{(\gamma,\delta)}$, d'ordres γ, δ.

L'opération D^ρ de la dérivation à indice quelconque ρ, définie par

$$\Gamma(-\rho)\, D^\rho f(z) = \int_0^z f(\alpha)(z-\alpha)^{-\rho-1}\, d\alpha \qquad (\rho<0),$$

appliquée pour $\rho=-\delta$ à la fonction $(1-z)^{-\delta} S(z)$, nous donne la relation

$$S^{(\delta)}(z) = \delta z^{-\delta} \int_0^z (1-\alpha)^{-\delta} S(\alpha)(z-\alpha)^{\delta-1}\, d\alpha \qquad (\delta>0),$$

d'où la conclusion

$$\bar{S}^{(\gamma,\delta)}(z) = \gamma\delta z^{-\gamma} \int_0^z \frac{S(\beta)\, d\beta}{(1-\beta)^\delta} \int_\beta^z \frac{(z-\alpha)^{\gamma-1}(\alpha-\beta)^{\delta-1}}{\alpha^\delta (1-\alpha)^\gamma}\, d\alpha$$

et le développement cherché de la double moyenne $S_N^{(\gamma,\delta)}$

$$(1) \quad S_N^{(\gamma,\delta)} = \gamma\delta \sum_{n=0}^{N} \frac{F(\delta, \gamma, N+\delta+\gamma+1, 1)}{F(\delta, \gamma, n+\delta+\gamma+1, 1)} \, \frac{s_{N-n}^{(\delta+\gamma+n)}}{(n+\delta)(n+\gamma)} \qquad (\delta>0,\ \gamma>0),$$

suivant les moyennes simples d'ordres non inférieurs à $\delta+\gamma$, où F signifie la fonction hypergéométrique. La symétrie du second membre par rapport à γ et δ prouve que l'on a toujours $S_N^{(\gamma,\delta)} \equiv S_N^{(\delta,\gamma)}$, fait bien curieux en lui-même et nullement évident, *a priori*.

On conclut facilement de (1) : $\lim\limits_{N=\infty} S_N^{(\gamma,\delta)} = c$, si la limite $\lim\limits_{n=\infty} s_n^{(\gamma+\delta)} = c$

existe. De même la formule

$$S^{(\delta+\gamma)}(z) = \frac{\Gamma(\delta+\gamma+1)\, z^{-(\delta+\gamma)}}{\Gamma(\delta+1)\,\Gamma(\gamma)} (1-z)^{\delta} \int_0^z \frac{\alpha^{\delta} S^{(\delta)}(\alpha)\,(z-\alpha)^{\gamma-1}\, d\alpha}{(1-\alpha)^{\delta+\gamma}}$$
$$(\delta > -1,\ \gamma > 0)$$

nous fournit pour $\delta \neq E(\delta)$ le développement inverse :

$$(2) \quad s_N^{(\delta+\gamma)} = \frac{\Gamma(\delta+\gamma+1)}{\Gamma(\delta+1)\,\Gamma(-\delta)\,\Gamma(\gamma)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n-\delta)}{\Gamma(n+1)} \frac{S_N^{(n+\gamma,\delta)}}{n+\gamma} \qquad (\delta > -1,\ \delta+\gamma > 0),$$

qui permet facilement de démontrer que l'existence de la limite

$$\lim_{N=\infty} S_N^{(\gamma,\delta)} = c$$

entraîne la conclusion voulue

$$\lim_{n=\infty} s_n^{(\delta+\gamma)} = c,$$

ce qui achève la preuve du théorème (I).

Pour $\delta = E(\delta)$ la série (2) est remplacée par la somme d'un nombre fini de termes.

Il est intéressant d'observer que le développement (2) est exactement le même que celui pour les moyennes de M. Riesz. Il est très probable que le théorème (I) a lieu aussi quand δ ou γ ou tous les deux sont négatifs et supérieurs à -1, et il serait très intéressant de lever les restrictions $\delta > 0$ et $\gamma > 0$.

THÉORIE DES FONCTIONS. — *Sur les fonctions continues et leurs dérivées.* Note de M. S. **Stoïlow**, présentée par M. Henri Lebesgue.

La fonction continue $f(x)$ étant définie dans l'intervalle de 0 à 1, considérons les ensembles (e_{y_0}) formés des points dont les abscisses sont comprises entre 0 et 1 et satisfont à l'équation

$$(e_{y_0}) \qquad f(x) = y_0$$

ainsi que les ensembles dont les points sont assujettis à satisfaire à la double inégalité

$$(E_{y_1}^{y_2}) \qquad y_1 \leq f(x) \leq y_2,$$

les quantités y étant quelconques.

Il est clair que les ensembles $(E_{y_1}^{y_2})$ seront de mesure différente de zéro, tandis que, sauf pour un ensemble dénombrable de valeurs de y_0, les ensembles (e_{y_0}) sont de mesure nulle. Ceci étant, nous ferons correspondre à $(0,1)$ de la variable x, un intervalle $(0,1)$ d'une autre variable ξ de la façon suivante : à tous les points de (e_{y_0}) nous ferons correspondre le point $\xi = m(E_{\mu}^{y_0}) = 0$, où m désigne la mesure et μ le minimum de $f(x)$ dans $(0, 1)$, et ce point seul si $m(e_{y_0}) = 0$; mais si $m(e_{y_0}) \neq 0$, on joindra à ce point tous ceux du segment l'ayant pour extrémité droite et de longueur $m(e_{y_0})$. On obtiendra ainsi un segment de longueur unité sur l'axe de la variable ξ, et une fonction $\varphi(\xi)$ définie sur ce segment de façon qu'elle prenne en un point ξ la même valeur que prend $f(x)$ sur l'ensemble correspondant; $\varphi(\xi)$ est une fonction jamais décroissante.

Soit S la somme des mesures de ceux des (e_{y_0}) dont la mesure est positive. On aura $S \leqq 1$ et $\varphi(\xi)$ sera constante en chaque point d'un ensemble ouvert formé d'intervalles et de mesure égale à S, complémentaire d'un ensemble parfait P sur lequel $\varphi(\xi)$ sera toujours croissante.

Cette fonction est dérivable, sauf peut-être sur un ensemble de mesure nulle faisant partie de P. D'autre part, il est aisé de se rendre compte que la somme de tous les ensembles de valeurs de x correspondant aux points d'un ensemble de mesure nulle de P est aussi de mesure nulle. Si l'on pose donc

$$f'_{[e_{f(x_0)}]} = \lim_{h \doteq 0} \frac{h}{m\left[E_{f(x_0)-h}^{f(x_0)+h}\right]},$$

on voit que cette limite existe pour des points x_0 de $(0, 1)$ formant un ensemble de mesure au moins égale à $1 - S$.

Sauf le cas où $S = 1$, que nous écarterons ici, la limite $f'_{[e_{f(x_0)}]}$ existe donc toujours pour une infinité de points d'une fonction continue.

Supposons que $f(x)$ soit dérivable en x_0. On aura

$$f'(x_0) = \lim_{h=0} \left\{ \frac{h}{m\left[E_{f(x_0)-h}^{f(x_0)+h}\right]} : \frac{m\left[\sigma_{f(x_0)-h}^{f(x_0)+h}\right]}{m\left[E_{f(x_0)-h}^{f(x_0)+h}\right]} \right\},$$

en désignant par $[\sigma_{f(x_0)-h}^{f(x_0)+h}]$ le segment faisant partie de $[E_{f(x_0)-h}^{f(x_0)+h}]$ et contenant x_0. Il faut donc, dans ce cas, que

$$\frac{m\left[\sigma_{f(x_0)-h}^{f(x_0)+h}\right]}{m\left[E_{f(x_0)-h}^{f(x_0)+h}\right]}$$

tende vers une limite λ_{x_0}, et si la dérivée est finie, que λ_{x_0} soit différent de zéro.

Si donc l'on excepte les points de P où $f'_{[ef(x)]}$ n'existe pas ou est nulle, qui forment un ensemble de mesure nulle, on voit que *la dérivée d'une fonction continue ne peut être nulle que tout au plus en un ensemble de points de mesure* S [1].

On en conclut immédiatement que si la dérivée est nulle presque partout, la fonction est représentable presque partout par une série de la forme

$$\sum_{i=0}^{i=\infty} \alpha_i \rho_i(x),$$

où $\rho_i(x)$ représente la fonction égale à 1 sur un ensemble et à zéro sur l'ensemble complémentaire [2].

Dans le même ordre d'idées il serait facile de voir que si $f'(x_0)$ existe, λ_{x_0} doit exister, hors de l'ensemble d'exception de mesure S, et que, si $f'(x_0)$ est fini, $\lambda_{x_0} > 0$. Mais il est évident que les points de (e_{y_0}), pour lesquels $\lambda_{x_0} > 0$, ne peuvent former qu'un ensemble dénombrable. Si donc on prend un point x_0 hors de l'ensemble d'exception $(S < 1)$, l'équation

$$f(x) = f(x_0)$$

aura toujours un nombre fini ou infini dénombrable de solutions, si $f(x)$ *est partout dérivable hors de l'ensemble d'exception* (avec une dérivée finie).

THÉORIE DES FONCTIONS. — *Sur l'existence effective des fonctions représentables analytiquement de toute classe de Baire.* Note de M. C. **Kuratowski**, présentée par M. Henri Lebesgue.

Je définis une fonction $f(\alpha, x)$ dépendant d'un nombre transfini α, de la deuxième classe, et de la variable x $(0 \leqq x \leqq 1)$, qui est, pour α fixe, fonction de x de classe α.

Cette définition fournit la solution du problème suivant : *Pour tout* α, *nommer une fonction déterminée de classe* α. M. Lebesgue [3] a déjà nommé des fonctions de classe α; mais son procédé ne conduit pas à attacher à

---

(1) Ceci est évidemment vrai dans le cas écarté, car alors $S = 1$.

(2) Il en résulte que toutes les fonctions ayant leur dérivée nulle presque partout sont du type de l'exemple donné par M. Lebesgue dans ses *Leçons sur l'intégration*, p. 55.

(3) *Journ. de Math.*, 1905, p. 209, note 1. Cf. page 212, note 3.

chaque α une fonction déterminée, *indépendante de la façon dont α est donné*. Il en est de même des procédés indiqués par MM. de la Vallée Poussin, Hahn et Sierpinski.

Notations. — Pour $0 \leq x < 1$; soit $x = 0, x^{(1)} x^{(2)} \ldots x^{(n)} \ldots$ le développement de x en fraction dyadique contenant une infinité de zéros; pour $x = 1$, soit $x^{(n)} = 1$. Soit

$$x_n = 0, x^{(1 \cdot 2n)} x^{(3 \cdot 2n)} x^{(5 \cdot 2n)} \ldots, \quad \text{pour} \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

$I_1, I_2, \ldots$ est la suite des intervalles (ouverts) à extrémités rationnelles; I_0 est l'ensemble vide. Posons $I_n(x) = I_n$, si $x^{(n)} = 1$ et s'il existe, en outre, un $m > n$ tel que $x^{(m)} = 1$; dans le cas contraire, ainsi que pour $x = 1$, $I_n(x) = I_0$.

Soit $r_{(1)}, r_{(2)}, \ldots, r_{(n)}, \ldots$ la suite des nombres rationnels. Je fais correspondre à chaque x un nombre transfini $\tau(x)$ comme il suit : je considère l'ensemble de ceux des $r_{(n)}$ dont les indices sont les nombres n pour lesquelles les nombres $x^{(n)}$, provenant du développement de x, sont égaux à 1; si cet ensemble est bien ordonné, je désigne par $\tau(x)$ son type d'ordre; dans le cas contraire, $\tau(x) = 0$. Posons

$$\tau_\alpha(x) = \tau(x), \quad \text{si} \quad \tau(x) < \alpha, \qquad \text{et} \qquad \tau_\alpha(x) = 0, \quad \text{si} \quad \tau(x) \geq \alpha.$$

Je définis par récurrence une fonction qui fait correspondre à chaque couple (α, x) un *ensemble* de nombres réels $C(\alpha, x)$ de sorte que, α étant fixe :

(I). Si E désigne un ensemble linéaire F ou O (suivant que α est pair ou impair) de classe $< \alpha$ [1], il existe un x tel que $E = C(\alpha, x)$;

(II). L'image [2] de $C(\alpha, x)$ est un ensemble plan O et F de classe α.

Définition de $C(\alpha, x)$:

$$C(0, x) = I_0, \qquad C(1, x) = \sum_{n=1}^{\infty} I_n(x);$$

$$C(\alpha + 1, x) = \sum_{n=0}^{\infty} C(\alpha, x_n) \quad \text{ou} \quad \prod_{n=0}^{\infty} C(\alpha, x_n)$$

---

(1) Les ensembles fermés et ouverts sont respectivement F et O de classe 0. Si

$$M = \prod_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} M_{n,k} \qquad \left(\text{ou} \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{k=1}^{\infty} M_{n,k} \right)$$

et les $M_{n,k}$ sont des ensembles O (ou F) de classe $< \alpha$, M est dit F (ou O) de classe α. Il sera plus commode de considérer les α de deuxième espèce comme impairs.

(2) Étant donnée une fonction qui fait correspondre à chaque x un ensemble $\varphi(x)$, j'appelle *image* de $\varphi(x)$ l'ensemble des points à coordonnées x, y, où y est élément de $\varphi(x)$.

[suivant que α est pair ou impair (>0)]. Pour α de deuxième espèce :

$$C(\alpha, x) = \sum_{n=0}^{\infty} C[\tau_\alpha(x_{2n}), x_{2n+1}].$$

On prouve la propriété (I) par récurrence, en remarquant que pour toute suite $\{t_{(n)}\}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, $0 < t_{(n)} < 1$, il existe un x tel que $x = t_{(n)}$. La propriété (II) se déduit des prémisses suivantes :

1° Pour n fixe, l'image de $I_n(x)$ est un ensemble O de classe 0; il en est de même de $I_n(x_k)$, $I_n[(x_{k_1})_{k_2}]$, etc.

2° $\overline{\varphi(x)}$ désignant l'image de $\varphi(x)$, on a, quel que soit φ,

$$\overline{\prod_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x)} = \prod_{n=1}^{\infty} \overline{\varphi_n(x)} \quad \text{et} \quad \overline{\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x)} = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\varphi_n(x)}.$$

3° Pour chaque système (α, a, b), on a

$$C[\tau_\alpha(a), b] = \sum_{0<\xi<\alpha} [T_\xi(a) \times C(\xi, b)],$$

$T_\alpha(x)$ désignant l'ensemble de nombres réels si $\tau(x) = \alpha$, et l'ensemble vide si $\tau(x) \neq \alpha$.

4° L'image de $T_\alpha(x)$, ainsi que celle de $T_\alpha(x_k)$, $T_\alpha[(x_{k_1})_{k_2}]$, etc., est F de classe α (¹).

Pour prouver la proposition 4°, on remarquera que l'image de $T_\alpha(x)$ $(\alpha > 0)$ est de la même classe que l'ensemble

$$P_\alpha - \sum_{0<\xi<\alpha} P_\xi,$$

P_α désignant l'ensemble de tous les x tels que $0 < \tau(x) \leq \alpha$. Or, si l'on pose

$$R(r_{(n)}) = \text{l'ensemble des } x (\neq 0) \text{ tels que } x^{(n)} = 0,$$

$$S(0, r_{(n)}) = R(r_{(n)}) + \prod_{r_{(k)} < r_{(n)}} R(r_{(k)}), \qquad S(\alpha, r_{(n)}) = R(r_{(n)}) + \prod_{r_{(k)} < r_{(n)}} \sum_{\xi<\alpha} S(\xi, r_{(k)})$$

on a

$$P_\alpha = \prod_{n=1}^{\infty} \sum_{\xi<\alpha} S(\xi, r_{(n)})$$

et, comme $R(r_{(n)})$ est F de classe 1, P_α est F de classe α.

(¹) Cf. *Fundamenta Mathematicæ*, V.

Posons $f(\alpha; x) = 1$, si x appartient à $C(\alpha, x)$; et $f(\alpha; x) = 0$ ailleurs. La fonction $f(\alpha, x)$ est de classe α.

En effet l'ensemble $B_\alpha = E[f(\alpha, x) = 1]$ est la projection orthogonale de l'intersection de la droite $y = x$ avec l'image de $C(\alpha, x)$. B_α est donc, en vertu de (II), un O et F (linéaire) de classe α. D'autre part, l'ensemble $D_\alpha = E[f(\alpha, x) = 0]$ étant formé par les x qui n'appartiennent pas à $C(\alpha, x)$, il n'existe aucun x pour lequel on ait $D_\alpha = C(\alpha, x)$. On en conclut, selon (I), que D_α ne peut être simultanément O et F de classe $< \alpha$. Il en est de même de B_α, car D_α est complémentaire de B_α. Ainsi, $f(\alpha, x)$ étant fonction caractéristique de l'ensemble B_α, qui est O et F de classe α et ne l'est (simultanément) dans aucune classe $< \alpha$, $f(\alpha, x)$ est de classe α [1].

Il est à remarquer que l'ensemble de tous les x qui appartiennent à $C[\tau(x_0), x_1]$ est non mesurable (B), de sorte que la fonction caractéristique de cet ensemble n'est pas représentable analytiquement.

NOMOGRAPHIE. — *Sur la résolution nomographique des systèmes d'équations.* Note de M. **M. Alliaume**, présentée par M. d'Ocagne.

Les calculs d'étalonnage des instruments de mesure consistent dans la résolution d'un système d'au moins autant d'équations qu'il y a de constantes instrumentales; ces équations sont de la même forme et ne diffèrent que par des valeurs numériques distinctes qu'il faut, en vertu des expériences, attribuer à certains paramètres; ceux-ci sont les lectures faites sur l'instrument et des valeurs, connues par hypothèse, de grandeurs mesurées.

Il sera utile de construire un nomogramme relatif à tous les instruments d'une même espèce, pour toutes les valeurs possibles des constantes instrumentales. Supposons qu'il y ait deux pareilles constantes (x, y) et que l'emploi de l'instrument comporte de une à trois lectures (z_2, z_3, z_4) et la détermination d'une inconnue finale z_1.

L'étalonnage équivalant à la résolution d'un système tel que

$$\varphi(x, y, z'_1, z'_2, z'_3, z'_4) = 0,$$
$$\varphi(x, y, z''_1, z''_2, z''_3, z''_4) = 0,$$

le nomogramme demandé est celui de l'équation à quatre, cinq ou six variables

$$\varphi(x, y, z_1, z_2, z_3, z_4) = 0$$

à laquelle s'appliquera presque toujours la belle méthode des points alignés

(1) De la Vallée Poussin, *Intégrales de Lebesgue*, p. 135.

de M. d'Ocagne, qui, par les réseaux de points à deux cotes, permet la réduction à une représentation plane d'une multiplicité à quatre, cinq ou six dimensions. L'étalonnage et l'emploi de l'instrument n'exigent pas le tracé du réseau (x, y) : à l'étalonnage qui précède une série de mesures correspond un point de ce réseau, et la connaissance de ce point est suffisante, sans qu'il soit nécessaire de posséder les valeurs numériques de ses coordonnées curvilignes dans le réseau (x, y). Le tracé de ce réseau ne devra se faire que lorsque, indépendamment de l'étalonnage d'un instrument, il s'agira de la résolution d'un système de deux équations de la même forme à deux inconnues, comme de deux équations linéaires non homogènes.

Si les équations à deux inconnues (x, y) ont des formes différentes,

$$\varphi'(x, y, z'_1, z'_2, \ldots, z'_m) = 0,$$
$$\varphi''(x, y, z''_1, z''_2, \ldots, z''_n) = 0,$$

la méthode des points alignés permet encore leur résolution jusqu'à $m = 4$, $n = 4$, pourvu que les deux équations puissent être représentées séparément par des nomogrammes à points alignés ayant en commun un réseau (x, y) de points à deux cotes.

Dans le cas le plus simple $m = 2$, $n = 2$, le nomogramme comporte des échelles z'_1, z'_2, z''_1, z''_2 et un réseau de points à deux cotes (x, y). Chaque équation définit la traversée de ce réseau par une droite que déterminent d'une part des points des deux premières échelles, d'autre part des points des deux dernières : l'intersection de ces droites a, dans le réseau, les cotes (x, y) demandées.

Lorsque m et n augmentent, certaines échelles sont remplacées par des réseaux de points à deux cotes. Ainsi, dans le cas le plus complexe $m = 4$, $n = 4$, le nomogramme est constitué de cinq réseaux de points à deux cotes, à savoir (z'_1, z'_2), (z'_3, z'_4), (x, y), (z''_1, z''_2), (z''_3, z''_4). La première équation définit une droite allant de (z'_1, z'_2) à (z'_3, z'_4); la droite définie par la deuxième passe par (z''_1, z''_2) et (z''_3, z''_4); et l'intersection de ces deux droites fournit les valeurs des inconnues au sein du réseau (x, y).

Aux mêmes conditions, la méthode des points correspondants permet d'atteindre $m = 6$, $n = 6$ si l'index, porté par un transparent, n'est pas simplement rectiligne (ni circulaire), et tel que l'ensemble de deux droites rectangulaires : le nomogramme est constitué de sept réseaux de points à deux cotes. Il en est de même si l'index est formé de deux droites parallèles dont la distance est variable. Enfin, on peut concevoir un nomogramme formé de neuf réseaux de points à deux cotes et propre à la résolution d'un

système de deux équations en (x, y) où $m = 8$, $n = 8$ par l'emploi d'un index déformable constitué de deux lignes qui ne soient pas des droites (ni des circonférences) et de l'une à l'autre desquelles le passage s'effectue par la variation d'un seul paramètre; tel est l'ensemble, indéformable en soi, de deux droites perpendiculaires, astreintes à ne se déplacer que parallèlement à elles-mêmes, leur intersection appartenant constamment à une ligne déterminée.

Il arrivera aussi qu'une équation à $(m + n + 1)$ variables

$$\varphi(z, z_1, z_2, \ldots, z_m, z_{m+1}, \ldots, z_{m+n}) = 0$$

puisse être considérée comme résultant de l'élimination d'une variable auxiliaire ζ entre deux équations

$$\varphi'(z, \zeta, z_1, z_2, \ldots, z_m) = 0,$$
$$\varphi''(z, \zeta, z_{m+1}, z_{m+2}, \ldots, z_{m+n}) = 0,$$

susceptibles d'être représentées séparément par des nomogrammes à points correspondants ayant en commun un réseau (z, ζ) de points à deux cotes. Le nomogramme de l'équation proposée sera alors l'association, par ce réseau commun, des nomogrammes des deux équations de disjonction. La famille de lignes en ζ ne devra pas être cotée ou pourra recevoir une chiffraison quelconque. Si $m + n$ ne surpasse pas 8, le tracé de deux droites suffira à la détermination de z; le tracé de deux couples de droites parallèles pourra y suffire si $m + n$ ne surpasse pas 12; un index déformable à un paramètre sera nécessaire si $m + n$ atteint 16.

MÉCANIQUE. — *Sur la gravitation einsteinienne des systèmes.* Note de M. **H.-C. Levinson.**

Dans plusieurs Notes, M. Le Roux a essayé de démontrer que dans la théorie de la relativité il ne peut pas exister de perturbations analogues à celles que l'on rencontre dans la mécanique classique. Il dit, en résumé, que dans un ds^2 à quatre dimensions, il ne peut figurer que quatre variables.

Il est facile de démontrer, comme M. Brillouin l'a indiqué dans une Note récente, que le mouvement d'un point matériel est presque le même dans les deux théories, pourvu que les vitesses des corps du champ soient assez petites par rapport à celui de la lumière. Ces considérations sont suffisantes pour le cas des planètes, par exemple. Mais les fondements des deux

théories sont distincts, et il serait possible que la théorie einsteinienne ne donne pas une solution logique du problème.

Dans sa dernière Note (¹) M. Le Roux se demande quelle sera la méthode rigoureuse suivant laquelle on obtiendra le ds^2 du champ de n corps. Je voudrais démontrer qu'il n'y a pas de difficulté logique à trouver un ds^2 à quatre variables seulement, qui représente le champ de n points matériels libres. Pour trouver ce ds^2 il faut résoudre les dix équations du champ gravitationnel $G_{\mu\nu}=0$, avec les conditions aux frontières. Cela n'a été fait que pour le cas d'un corps au repos.

Supposons que nous ayons la solution des équations se rapportant au champ d'un point matériel de masse m en mouvement arbitraire. Le ds^2 dépendra évidemment des coordonnées du point matériel. Appelons $u_1, \ldots, u_4$ les coordonnées d'un point du système de l'observateur, et $v_1, \ldots, v_4$ les coordonnées du point matériel.

Le ds^2 s'écrira

$$(1)\qquad ds^2=\sum_{\mu=1}^{4}\sum_{\nu=1}^{4} f_{\mu\nu}(u_1, \ldots, u_4; v_1, \ldots, v_4; m)\, du_\mu\, du_\nu,$$

les $f_{\mu\nu}$ étant supposés complètement déterminés. On peut dire ici que l'élément linéaire est fonction de plus de quatre variables. Mais il est clair qu'il n'y a que quatre variables indépendantes. Les v_i sont des fonctions des u_i.

Considérons maintenant le cas de deux points matériels libres de masses m_1 et m_2. Le cas de n points matériels lui est analogue. Représentons les coordonnées des deux masses respectivement par $x_1, \ldots, x_4$ et $y_1, \ldots, y_4$. Nous choisirons les x_i comme variables indépendantes. Alors il faut considérer les y_i comme des fonctions inconnues des x_i. Il résulte de (1)

$$(2)\qquad ds^2=\sum_{\mu=1}^{4}\sum_{\nu=1}^{4} f_{\mu\nu}(x_1, \ldots, x_4; y_1, \ldots, y_4; m_2)\, dx_\mu\, dx_\nu.$$

Or on peut également choisir les y_i comme variables indépendantes, les x_i étant des variables dépendantes. Dans ce cas

$$(3)\qquad ds^2=\sum_{\mu=1}^{4}\sum_{\nu=1}^{4} f_{\mu\nu}(y_1, \ldots, y_4; x_1, \ldots, x_4; m_1)\, dy_\mu\, dy_\nu.$$

(¹) *Comptes rendus*, t. 175, 1922, p. 1395.

Ainsi le ds^2 peut s'exprimer à l'aide de deux systèmes de variables, dont il faut trouver la relation.

Chacune des formes (2) et (3) conduit à quatre équations différentielles du mouvement. Nous obtenons ainsi un système de huit équations entre les neuf quantités $x_1, \ldots, x_4; y_1, \ldots, y_4$. Les solutions sont définies comme à l'ordinaire.

Un ds^2 pour ce champ, qui contient quatre variables indépendantes et pas de variables dépendantes, se déduit immédiatement de (2) ou (3) par substitution des y_i comme fonctions des x_i ou inversement; les substitutions étant données par les solutions des équations différentielles.

Dans le cas de n points matériels, il faut tout d'abord résoudre les équations du champ avec des conditions aux frontières représentant le cas de $n-1$ points matériels en mouvement arbitraire. Nous avons alors, au lieu de (2) et (3), n formes différentes du ds^2, chacune contenant quatre variables indépendantes, et $4(n-1)$ variables dépendantes. Celles-ci conduisent à $4n$ équations du mouvement entre les $4n$ variables et s. De même que pour le cas précédent, il existe un ds^2 ne contenant que quatre variables indépendantes.

Observations à l'occasion de la Communication de M. H. C. Levinson, par M. Émile Picard.

Je tiens à dire que M. H. C. Levinson m'a remis, il y a dix jours, la Note qu'on vient de lire. On a vu dans le dernier numéro des *Comptes rendus* que M. Haag s'est occupé aussi du problème des n corps dans la théorie de la relativité. Ces travaux sont donc indépendants; les deux auteurs se placent d'ailleurs à des points de vue différents.

M. Le Roux avait déjà appelé l'attention sur la position même du problème. Tant qu'on se borne au mouvement d'un seul point, il est clair qu'une mécanique générale de la relativité n'est pas fondée. Or, quand on veut essayer de constituer une mécanique relativiste des systèmes, on se heurte à beaucoup d'arbitraire, et l'on peut se demander si la confrontation de l'expérience ou de l'observation avec les résultats d'une théorie présentant une telle indétermination offrira un bien grand intérêt. On sait à quelles discussions a donné lieu l'examen de quelques cas très particuliers relatifs à un seul point. Que sera-ce pour un système? Tout en applaudissant donc à des recherches, comme celles de M. Haag et de

M. H. Levinson, d'un grand intérêt mathématique, il est permis de rester quelque peu sceptique sur la valeur, quant à l'importance de la théorie de la relativité, des comparaisons qui pourront être faites avec la réalité.

CARTOGRAPHIE. — *Sur un procédé de représentation stéréoscopique des surfaces topographiques.* Note de M. G. **Poivilliers** présentée par M. Maurice d'Ocagne.

On connaît déjà divers procédés permettant d'obtenir une représentation stéréoscopique des surfaces topographiques; mais ces divers procédés étant tous fondés sur le fait que les deux vues assemblées doivent être deux perspectives coniques de la surface sont d'une application pratique difficile.

Le nouveau procédé, ici proposé, diffère des précédents en ce que les deux perspectives coniques sont remplacées par deux projections cylindriques dont l'une A est une projection droite, et l'autre B une projection oblique. Cette substitution a pour effet d'introduire dans la vue stéréoscopique une courbure générale, d'ailleurs assez peu sensible, mais sans altérer aucunement le relief relatif. La projection A est la carte proprement dite (représentation classique du terrain par courbes de niveau); la projection B est obtenue, en partant de A, par un décalage successif des courbes de niveau proportionnellement à leur différence d'altitude par rapport à un plan de comparaison arbitrairement choisi; ce décalage étant effectué dans une direction fixe choisie comme direction de base.

On obtient B en calquant A et en déplaçant le calque dans la direction Est-Ouest, d'une quantité fixe à chaque passage d'une courbe de niveau à la suivante. La planimétrie s'obtient par interpolation entre les courbes de niveau. Pratiquement, le tracé peut être effectué à l'échelle du $\frac{1}{20000}$, le décalage étant de $0^{mm},5$ pour une équidistance de 20^{m}. L'examen de la double figure à l'aide d'un binocle stéréoscopique donne une image en relief du terrain.

Dans ce procédé l'impression de relief est d'autant plus grande que le coefficient du décalage des courbes est lui-même plus grand.

Comme dans tout assemblage stéréoscopique, la dimension apparente de l'image en relief dépend de l'écartement des deux vues A et B par rapport aux yeux de l'observateur.

Au lieu de tracer la carte B par un décalage successif du calque, on peut utiliser un appareil à copier dans lequel deux crayons sont portés par une

tige rigide, et peuvent être réglés en distance le long de cette tige à l'aide d'une vis micrométrique. La tige peut se déplacer parallèlement à elle-même au-dessus de la minute de la carte A. On peut ainsi tracer simultanément A et B. Pour passer d'une courbe à la suivante, on agit sur la vis micrométrique qui décentre les crayons.

On peut également utiliser un autre type d'appareil dans lequel une tige semblable à la précédente peut se déplacer parallèlement aux génératrices d'un cylindre sur lequel sont enroulés la minute et le calque. Le tracé s'effectue alors par la rotation du cylindre autour de son axe et par le déplacement simultané de la tige portant les crayons, parallèlement aux génératrices. Dans les deux cas, la position de la tige, par rapport à la minute, matérialise la direction de base choisie.

Le stéréo-autographe, objet de la Note insérée dans les *Comptes rendus* du 30 octobre 1922, permet également le tracé automatique des deux projections en partant de deux vues photographiques du terrain.

L'examen stéréoscopique des deux projections A et B peut se faire par n'importe quel procédé connu. En particulier, ces cartes peuvent être projetées devant un auditoire, en utilisant les anaglyphes ou la lumière polarisée.

Ce mode de représentation du terrain peut faciliter l'étude de la topologie et de la morphologie. Il peut être appliqué avec succès aux cartes géologiques, car il permet de visualiser la superposition des diverses couches du terrain à l'intérieur du sol.

PHYSIQUE MATHÉMATIQUE. — *Sur la théorie électromagnétique relativiste.* Note de M. **Paul Dienes**, présentée par M. J. Hadamard.

1. Dans son récent Livre ([1]), M. Einstein déclare être convaincu que la théorie électromagnétique de M. Weyl ne nous approche pas de la solution du problème fondamental qu'est la géométrisation des forces électromagnétiques. Dans cette Note, nous allons appuyer cette remarque par un calcul bien simple.

La relation entre la dérivation covariante (*erweiterung*)

$$(1) \qquad \frac{\mathrm{DA}^{\mu}}{\mathrm{D}x^{\alpha}} = \frac{\partial \mathrm{A}^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} + \Gamma^{\mu}_{s\alpha}\mathrm{A}^{s}, \qquad \frac{\mathrm{DA}_{\mu}}{\mathrm{D}x^{\alpha}} = \frac{\partial \mathrm{A}_{\mu}}{\partial x^{\alpha}} - \Gamma^{s}_{\mu\alpha}\mathrm{A}_{s}$$

([1]) A. Einstein, *Vier Vorlesungen über Relativitätstheorie* (Vieweg, 1922, p. 63).

et le déplacement $\delta A^\mu = -\Gamma^\mu_{s\alpha} A^s dx^\alpha$, $\delta A_\mu = \Gamma^s_{\mu\alpha} A_s dx^\alpha$ est donné par

$$(2) \qquad \delta A^\mu = dA^\mu - \frac{DA^\mu}{Dx^\alpha} dx^\alpha, \qquad \delta A_\mu = dA_\mu - \frac{DA_\mu}{Dx^\alpha} dx_\alpha.$$

Pour un invariant, c'est-à-dire pour un tenseur d'ordre o, f, on pose

$$\frac{Df}{Dx^\alpha} = \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} \qquad \text{et} \qquad \delta f = 0.$$

La dérivation est définie aussi pour les tenseurs d'ordre supérieur sans que l'on considère des déplacements correspondants.

D'autre part, après l'introduction de la métrique, on considère les quantités A^μ et $B_\mu = A^i g_{i\mu}$ comme les composantes contravariantes ou covariantes *du même tenseur*. La raison géométrique de cette identification est que ces deux tenseurs A et B ont la même longueur, leur angle est o et ils forment le même angle avec un tenseur quelconque. On étend ces définitions aux tenseurs d'ordre supérieur et l'on arrive au résultat que $g_{\mu\nu}$, $g^{\mu\nu}$, δ^μ_ν sont les composantes covariantes, contravariantes et mixtes du même tenseur.

2. Dans le Calcul différentiel absolu de MM. Ricci et Levi-Cività, comme aussi dans tous les écrits de M. Einstein, on a $\Gamma^\mu_{\alpha s} = \left\{ {\alpha s \atop \mu} \right\}$. Il n'y a donc qu'une seule suite de paramètres indépendants, celle des $g_{\mu\nu}$, et M. Einstein s'en est servi pour géométriser la gravitation. Pour faire place aux forces électromagnétiques, force nous est donc de généraliser le calcul. M. Weyl (¹) ne suppose plus que $\Gamma^\mu_{\alpha s} = \left\{ {\alpha s \atop \mu} \right\}$ et il introduit une correspondance entre les longueurs attachées aux différents points en posant $\delta l = l\delta\varphi$ avec $l = g_{\mu\nu} A^\mu A^\nu$, $\delta\varphi = \varphi_i dx^i$, où les fonctions arbitrairement données φ_i sont les potentiels électromagnétiques.

D'après le raisonnement (d'ailleurs classique) de M. Einstein (*loc. cit.*, p. 46), on a

$$(3) \qquad \delta(g_{\mu\nu} A^\mu A^\nu) = \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial X^\alpha} A^\mu A^\nu dX^\alpha + g_{\mu\nu} A^\mu \delta A^\nu + g_{\mu\nu} A^\nu \delta A^\mu,$$

ce qui conduit, grâce à (2), à l'équation

$$(4) \qquad \delta l = A^\mu A^\nu \frac{Dg_{\mu\nu}}{DX^\alpha} dX^\alpha.$$

Comme le déplacement d'un tenseur d'ordre zéro est, par définition, zéro,

---

(¹) H. WEYL, *Raum, Zeit, Materie*, 3ᵉ édition, p. 101.

M. Einstein en conclut que

$$\frac{Dg_{\mu\nu}}{DX^\alpha} = 0. \tag{5}$$

Dans la théorie de M. Weyl, cependant, il y a des tenseurs privilégiés d'ordre zéro, les longueurs l, dont, par définition, le déplacement δl n'est pas zéro. Il est donc important de remarquer que l'équation (5) suit déjà du fait que $g_{\mu\nu}$ et δ^μ_ν représentent le même tenseur et qu'on a formellement $\frac{D\delta^\mu_\nu}{DX^\alpha} = 0$. *Il en résulte que* $\varphi_i = 0$. *Le tenseur* $K_{\mu\nu,\alpha} = \frac{Dg_{\mu\nu}}{DX^\alpha}$ *de M. Eddington* (¹) *s'évanouit aussi.*

3. On pourrait essayer d'échapper à ces conclusions, en rendant la dérivation des tenseurs covariants et contrevariants complètement indépendante l'une de l'autre. On aurait ainsi, par exemple,

$$\frac{DA^\lambda_{\mu\nu}}{DX^\alpha} = \frac{\partial A^\lambda_{\mu\nu}}{\partial X^\alpha} + \Gamma^\lambda_{s\alpha} A^s_{\mu\nu} - \overline{\Gamma}^s_{\mu\alpha} A^\lambda_{s\nu} - \overline{\Gamma}^s_{\nu\alpha} A^\lambda_{\mu s}.$$

La contraction $\lambda = \mu$ donnera

$$\frac{DA^\lambda_{\lambda\nu}}{DX^\alpha} = \frac{\partial A^\lambda_{\lambda\nu}}{\partial X^\alpha} + \Gamma^\lambda_{s\alpha} A^s_{\lambda\nu} - \overline{\Gamma}^s_{\lambda\alpha} A^\lambda_{s\nu} - \overline{\Gamma}^s_{\nu\alpha} A^\lambda_{\lambda s}.$$

D'autre part, $A^\lambda_{\lambda\nu}$ étant un tenseur covariant d'ordre un, on a

$$\frac{DA^\lambda_{\lambda\nu}}{DX^\alpha} = \frac{\partial A^\lambda_{\lambda\nu}}{\partial X^\alpha} - \overline{\Gamma}^s_{\nu\alpha} A^\lambda_{\lambda s},$$

ce qui, joint à l'équation précédente, montre que $\Gamma^\lambda_{s\alpha} - \overline{\Gamma}^\lambda_{s\alpha} = 0$. *La généralisation proposée n'est pas possible.*

4. Il y a cependant une remarque à faire sur l'équation (3), que nous écrirons cette fois sous la forme

$$\delta(g_{\mu\nu} A^\mu A^\nu) = \delta g_{\mu\nu} A^\mu A^\nu + g_{\mu\nu} A^\nu \delta A^\mu + g_{\mu\nu} A^\mu \delta A^\nu.$$

Pour arriver à (4), avec M. Einstein et avec tous les auteurs, nous avons remplacé δA^μ par une différentielle inexacte arbitrairement donnée et en même temps nous avons posé $\delta g_{\mu\nu} = \delta g_{\mu\nu}$. Les quantités $g_{\mu\nu}$ sont cependant aussi des composants tensoriels. Est-il raisonnable de supposer qu'un ten-

---

(¹) A.-S. Eddington, *A generalisation of Weyl's theory*... (*Proc. of Roy. Soc. A.*, vol. 99, 1912, p. 109).

eur d'ordre *deux* se déplace d'une façon aussi simple quand le déplacement des tenseurs d'ordre *un* est tellement compliqué?

Comme la dérivation est définie pour n'importe quel tenseur, la généralisation naturelle de la notion du déplacement est l'extension des équations (2), ce qui, sous forme finie, n'est autre que l'extension du parallélisme à la Levi-Civitá aux tenseurs d'ordre supérieur. On aura ainsi par exemple

$$(6) \qquad \delta A_{\mu\nu} = dA_{\mu\nu} - \frac{DA_{\mu\nu}}{DX^\alpha} dX^\alpha = \Gamma^s_{\mu\alpha} A_{s\nu}\, dX^\alpha + \Gamma^s_{\nu\alpha} A_{\mu s}\, dX^\alpha.$$

Remarquons qu'on ne peut pas donner arbitrairement la différentielle inexacte $\delta A_{\mu\nu}$ sans renoncer à la règle $\delta(A_i A_j) = \delta A_i A_j + A_i \delta A_j$.

En conséquence de (6), (γ) *est remplacé par l'identité* $\delta l = 0$. Du reste, (5) n'est point touché par les nouvelles conventions parce qu'elle résulte de l'identité de $g_{\mu\nu}$ avec δ^μ_ν. *Les théories de M. Weyl et de M. Eddington ne paraissent donc pas s'encadrer facilement dans le Calcul Tensoriel.* Cet échec de la généralisation des forces électromagnétiques paraît, d'ailleurs, naturel dans la conception de M. Einstein (version pratique de la conception Riemannienne) d'après laquelle la géométrie est constituée par les propriétés des réseaux de bâtons (corps rigides idéaux) et ces propriétés sont parfaitement déterminées par l'unique tenseur $g_{\mu\nu}$, c'est-à-dire par la gravitation.

CHIMIE PHYSIQUE. — *Sur la dissociation du chloro-iridate de potassium.* Note de M. G. **Gire**, présentée par M. Henry Le Chatelier.

La décomposition du chloro-iridate de potassium

$$\frac{1}{2}\underset{\text{sol.}}{(IrCl^4, 2KCl)} = \frac{1}{2}\underset{\text{sol.}}{Ir} + \underset{\text{sol.}}{KCl} + \underset{\text{gaz}}{Cl^2} - Q$$

analogue à celle des chloroplatinates dont j'ai donné un exemple dans une précédente Note (¹), a été étudiée de la même manière.

Dans le Tableau ci-après sont réunis les résultats de mes mesures.

Pendant la décomposition du chloro-iridate, le chlorure de potassium fond. La valeur la plus probable du point de fusion de ce sel serait, d'après les déterminations les plus récentes, 775°.

(¹) *Comptes rendus*, t. 174, 1922, p. 1700.

Températures en degrés C.	Températures absolues.	Tensions mesurées en mm de Hg.	Tensions calculées équation (I).	Tensions calculées équation (II).
574	847	9,2	4,7	»
600	873	14,6	8,8	»
623	896	18,7	14,9	»
638	911	20,0	20,7	»
651	924	30,7	27,3	»
663	936	38,1	35,2	»
678	951	50,4	47,8	»
692	965	64,1	63,2	»
706	**979**	**83,0**	**83,0**	»
719	992	105,8	106,2	»
729	1002	125,2	128,1	»
739	1012	153,7	153,8	»
741	**1014**	**159,6**	**159,6**	140,8
751	**1024**	**189,1**	**189,1**	177,0
762	1035	243,5	232,1	222,8
774	1047	301,8	285,9	286,0
784	1057	345,6	339,0	330,5
798	1071	439,3	428,7	451,8
807	1081	540,7	505,8	537,5
810	1083	543,0	522,6	554,5
820	**1093**	**653,4**	613,9	**653,4**
830	**1103**	**763,3**	720,0	**763,3**
844	**1117**	**933,2**	875,7	**933,2**

A partir de cette température le système est du genre

$$\text{sol.} \rightleftharpoons \text{sol.} + \text{liq.} + \text{gaz} - Q$$

et sa variance n'est point changée. Il n'apparaît pas, en effet, qu'il y ait dissolution du chloro-iridate dans le chlorure fondu et si cette dissolution se produit, le grand excès de chloro-iridate maintient l'état de saturation et l'équilibre demeure un « équilibre complet ».

Si l'on cherche l'équation d'équilibre du système avant et après la fusion; en utilisant les pressions mesurées à 706°, 741° et 751°, on trouve :

$$\text{(I)} \qquad \log P = -\frac{5280}{T} + 6{,}41 \log T - 12{,}86$$

et en utilisant les pressions mesurées à 820°, 830° et 844°,

$$\text{(II)} \qquad \log P = -\frac{39400}{T} - 65{,}72 \log T + 237{,}5.$$

L'examen des tensions calculées pour différentes températures à l'aide de ces deux équations (colonnes 4 et 5 du Tableau) permet de constater qu'elles représentent des courbes se coupant pour la tension $P = 286^{mm}$ à la température de 774° (température de fusion de KCl), la seconde courbe étant moins inclinée sur l'axe des températures que la première.

Déjà M. Le Chatelier [1] a signalé, à propos de l'hydrate de chlore, le relèvement sur l'axe des températures que subit la courbe de dissociation d'un corps lorsqu'un des produits de la décomposition vient à fondre.

L'application de la formule de Clapeyron,

$$\frac{Q}{T} = \frac{R}{E}\frac{1}{p}T\frac{dp}{dT},$$

à cette transformation montre en effet qu'à la température de fusion d'un des produits de la dissociation la valeur Q, chaleur de réaction, s'augmente de la chaleur de fusion de ce produit qui est de même signe qu'elle et que $\frac{dp}{dT}$, coefficient angulaire de la courbe d'équilibre, subit de ce fait un brusque accroissement.

Il s'ensuit qu'en calculant pour cette température de fusion les valeurs de Q correspondant aux deux courbes d'équilibre, on peut obtenir, par différence, la chaleur de fusion de ce produit de dissociation.

La chaleur de dissociation correspondant au dégagement d'une molécule gazeuse est donnée par la formule

$$Q = -(a \times 4{,}571) + 2bT \text{ (chaleur négative)}$$

(a et b étant les coefficients en $\frac{1}{T}$ et log T de l'équation de dissociation).

En appliquant cette formule à l'une et l'autre des équations d'équilibre pour la température absolue de fusion :

$$T = 774° + 273,$$

j'ai obtenu successivement :

$$Q = 37{,}54 \text{ (pour l'équation I)};$$
$$Q' = 42{,}46 \text{ (pour l'équation II)}.$$

La chaleur de fusion d'une molécule de KCl serait par conséquent :

$$42{,}46 - 37{,}54 = 4{,}92 \text{ (chaleur négative)}.$$

---

(1) *Recherches sur les équilibres chimiques*, p. 159.

S. Somozuzny et F. Rambach (¹), en 1910, ont donné comme chaleur moléculaire de fusion de ce sel — 4,69.

Ces deux valeurs, ainsi qu'il convient, sont sensiblement égales à la chaleur moléculaire de dissolution de ce corps — 4,40.

SPECTROSCOPIE. — *Les spectres d'absorption ultraviolets des alcaloïdes du groupe de l'isoquinoléine. La narcotine, l'hydrastine et l'hydrocotarnine.* Note de M. **Pierre Steiner**, présentée par M. G. Urbain.

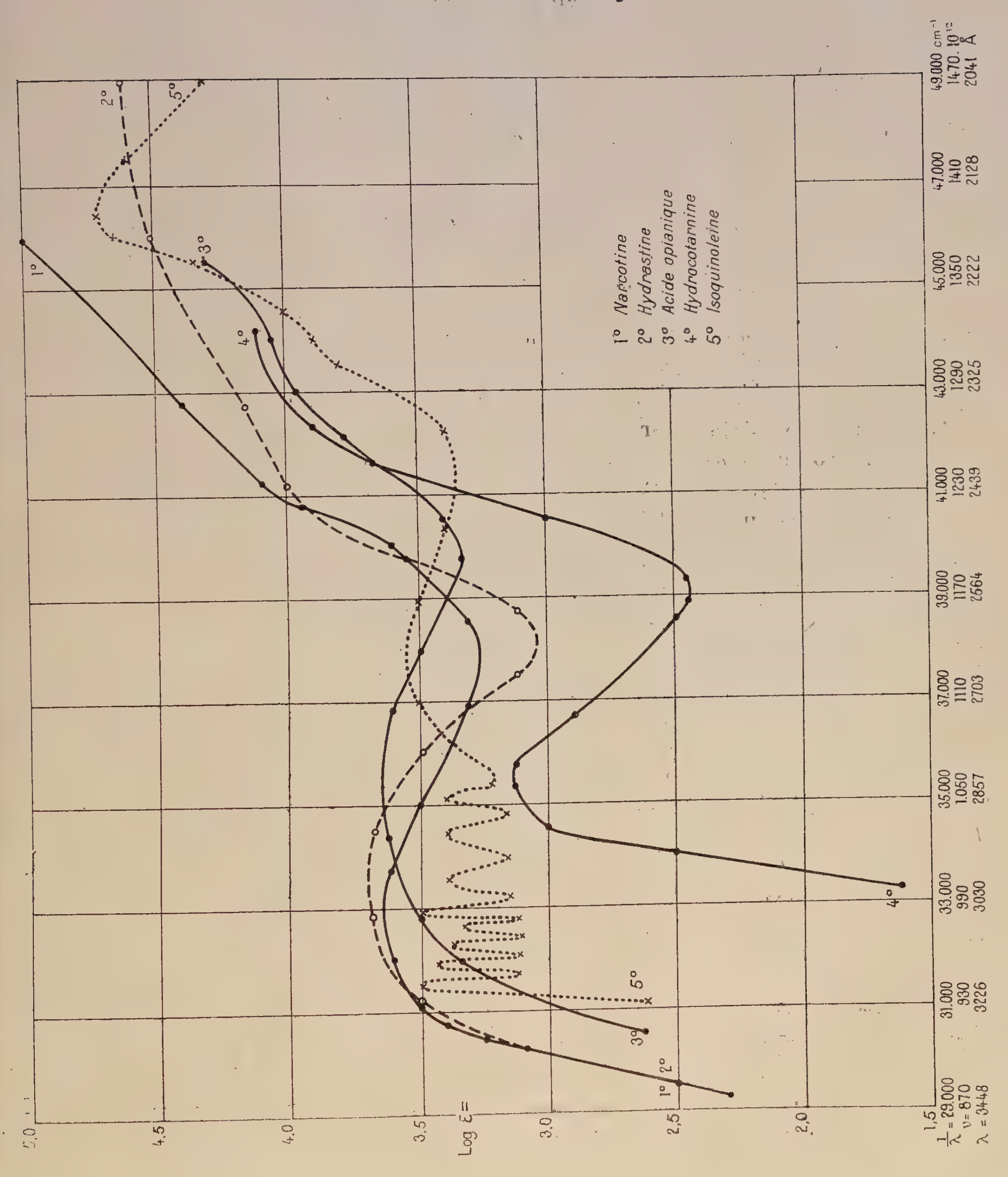
Dans la molécule de narcotine le noyau isoquinoléine est partiellement saturé tandis que dans la papavérine, dont nous avons décrit le spectre récemment (²), ce noyau est intact. La narcotine est un dérivé de la tétrahydroisoquinoléine. Par hydratation on parvient à scinder cette molécule de narcotine : d'une part en un alcaloïde plus simple dérivé de la tétrahydroisoquinoléine, l'hydrocotarnine ; d'autre part en un dérivé du benzène, l'acide opianique.

Narcotine. $+ H^2O =$ Hydrocotarnine. + Acide opianique.

La molécule d'hydrastine ne diffère de celle de narcotine que par l'absence du groupe $- O - CH^3$ dans le noyau isoquinoléine.

Nous avons étudié, d'après la méthode de V. Henri, les spectres d'absorption ultraviolets quantitatifs de la narcotine et de l'hydrastine en

(¹) *Zeit. anorg. Chem.*, t. 65, 1910, p. 424.
(²) *Comptes rendus*, t. 175, 1922, p. 1146.


1° Narcotine
2° Hydrastine
3° Acide opianique
4° Hydrocotarnine
5° Isoquinoleine
Log ε =
5,0
4,5
4,0
3,5
3,0
2,5
2,0
1,5
1/λ = 29.000
ν = 870
λ = 3448
31.000 930 3226
33.000 990 3030
35.000 1.050 2857
37.000 1110 2703
39.000 1170 2564
41.000 1230 2439
43.000 1290 2325
45.000 1350 2222
47.000 1410 2128
49.000 cm⁻¹ 1470.10¹² 2041 Å

solution alcoolique et éthérée; de l'hydrocotarnine en solution hexanique; de l'acide opianique en solution dans l'éther-alcool.

Pour tous ces corps, nous avons trouvé une bande large suivie, du côté des petites longueurs d'onde, d'un minimum à partir duquel l'absorption augmente de nouveau rapidement et fortement, ainsi que le montre le Tableau suivant :

	Maxima des bandes.			Minima des bandes.		
	λ.	$\frac{1}{\lambda}$ cm^{-1}.	ε.	λ.	$\frac{1}{\lambda}$ cm^{-1}.	ε.
Narcotine........	3040 Å	32890	4500	2650 Å	37740	2500
Hydrastine.......	2970	33670	5000	2621	38150	1300
Acide opianique...	2810	35590	4100	2527	39570	2400
Hydrocotarnine....	2810	35590	1400	2561	39050	250

La figure ci-jointe représente les courbes d'absorption de la narcotine et de l'hydrastine en solution alcoolique, de l'hydrocotartine en solution hexanique, de l'acide opianique en solution dans l'éther-alcool, et par comparaison, la courbe de l'isoquinoléine en solution hexanique, décrite récemment par M. Fischer et nous [1]. En abscisses sont portées les fréquences et en ordonnées les logarithmes des coefficients d'absorption ε, définis par $J = J_0 . 10^{-\varepsilon c \vartheta}$.

Résultats. — 1° Le spectre d'absorption ultraviolet de la narcotine est déterminé par le noyau benzénique de sa molécule (acide opianique); le noyau isoquinoléinique (hydrocotarnine) déplace seulement l'absorption vers le rouge. Pour la papavérine, au contraire, c'est le noyau isoquinoléinique et non le noyau benzénique qui est déterminant.

2° Le spectre de l'hydrastine ne diffère de celui de la narcotine que par un déplacement des maximum et minimum vers les petites longueurs d'onde et par de petites différences dans l'intensité de l'absorption.

3° L'hydrocotarnine, qui contient un noyau isoquinoléinique partiellement saturé, présente un spectre formé d'une seule bande dans l'ultraviolet et ne rappelant en rien le spectre de l'isoquinoléine; de plus, elle absorbe moins fort que l'isoquinoléine.

4° D'après les mesures précédentes, on peut doser spectrographiquement $0^{mg},07$ de narcotine ou d'hydrastine dans 2^{cm^3} de solvant.

---

[1] *Comptes rendus*, t. 175, 1922, p. 882.

SPECTROSCOPIE. — *Sur la structure des spectres d'arc du molybdène, du sélénium et du chrome.* Note [1] de M. **A. Catalan**, présentée par M. G. Urbain.

Dans une précédente Communication, nous nous sommes occupé de certaines particularités concernant le spectre du chrome, et nous allons traiter au même point de vue les spectres du molybdène, du sélénium et du chlore.

Molybdène. — Son spectre d'arc est d'une complexité extrême et doit présenter un grand nombre de systèmes de séries. Dans la Table on trouvera la première description de l'un d'eux.

TABLE II.

Série principale $1s - mp$.

$1s = 57420,41$.

λ.	Int.	ν.	Δν.	m.	$mp_{1,2,3}$.
3798,259	(50R)	26320,41	448,57		31100,00
3864,115	(50R)	25871,84	257,55	(1)	548,57
3902,963	(50R)	25614,29			806,01

Série étroite $2p - ms$.

$2p_1 = 31100,00$; $2p_2 = 31548,57$; $2p_3 = 31806,01$.

λ.	Int.	ν.	Δν.	m.	ms.
-3798,259	(50R)	—26320,41	448,57		
-3864,115	(50R)	—25871,84	257,55	(1)	57420,41
-3902,968	(50R)	—25614,29			
7485,73	(8)	13355,08	448,44		
7242,54	(7)	13803,52	257,56	(2)	17444,94
7109,87	(7)	14061,08			

Série nébuleuse $2p - md$.

$2p_1 = 31100,00$; $2p_2 = 31548,57$; $2p_3 = 31,806,01$.

λ.	Int.	ν.	Δν.	m.	
5368,088	(calc.)	18626,91	9,80		
64,266	(3)	636,71	12,79		
60,586	(15)	649,50			
			448,56		$3d_1 = 12450,50$
5242,780	(3)	19068,56	6,92		$3d_2 =$ 463,29
40,878	(5)	075,48	9,80	(3)	$3d_3 =$ 473,09
38,186	(5)	085,28			$3d_4 =$ 480,01
			257,44		$3d_5 =$ 484,64
5174,179	(8)	19321,37	4,62		
72,943	(8)	325,99	6,93		
71,088	(4)	332,92			

A noter que le terme diffus est aussi quintuple et que le nombre de raies est 9 $(3+3+3$ composantes). Les raies du triplet de la série principale sont les raies ultimes de Gramont [2]. Nous trouvons également dans ce spectre des multiplets analogues à ceux du chrome et du manganèse.

Sélénium. — Les triplets diffus de cet élément ont été regardés comme

(1) Séance du 15 janvier 1923.

(2) *Tables annuelles de constantes et données numériques de Chimie, de Physique*, etc. Paris, 1913, p. 250.

exceptionnels par le nombre, l'intensité et l'emplacement de leurs satellites. Il est fort probable que de nouvelles mesures plus précises que celles qui existent montreront qu'ils sont formés par neuf raies et terme diffus quintuple comme ceux du Cr et du Mo.

Chlore. — Son spectre d'étincelle présente des triplets. L'un d'eux, d'aspect diffus et avec des séparations s'approchant à 67.3 et 40.7 (séparations qui ont été signalées par Paulson comme fréquentes dans ce spectre) est mentionné dans les travaux de Kayser [1]. Quoique les Tables donnent un nombre de composantes égal à $1 + 3 + 2$, la simple observation de la photographie suffit pour se convaincre de la présence d'au moins trois composantes dans la première raie. Ce triplet doit être analogue à ceux du Mn. Des mesures plus exactes sont nécessaires pour résoudre cette question.

En résumé, le terme diffus dans les éléments des colonnes VII et VI de la Table périodique est quintuple et le nombre de raies qui forment les triplets diffus est neuf ($3 + 3 + 3$ composantes).

SPECTROSCOPIE. — *Spectres d'absorption ultraviolets de l'aniline et des toluidines.* Note de M. **F.-W. Klingstedt**, présentée par M. G. Urbain.

L'aniline et la paratoluidine possèdent, d'après les études qualitatives des auteurs antérieurs (Hartley, Baly, Purvis, etc.), deux bandes très larges, l'orthotoluidine n'aurait qu'une seule bande.

Les mesures quantitatives des coefficients d'absorption, d'après la méthode de Victor Henri et l'emploi d'une source de lumière ayant un spectre ultraviolet continu, nous ont donné des résultats complètement différents.

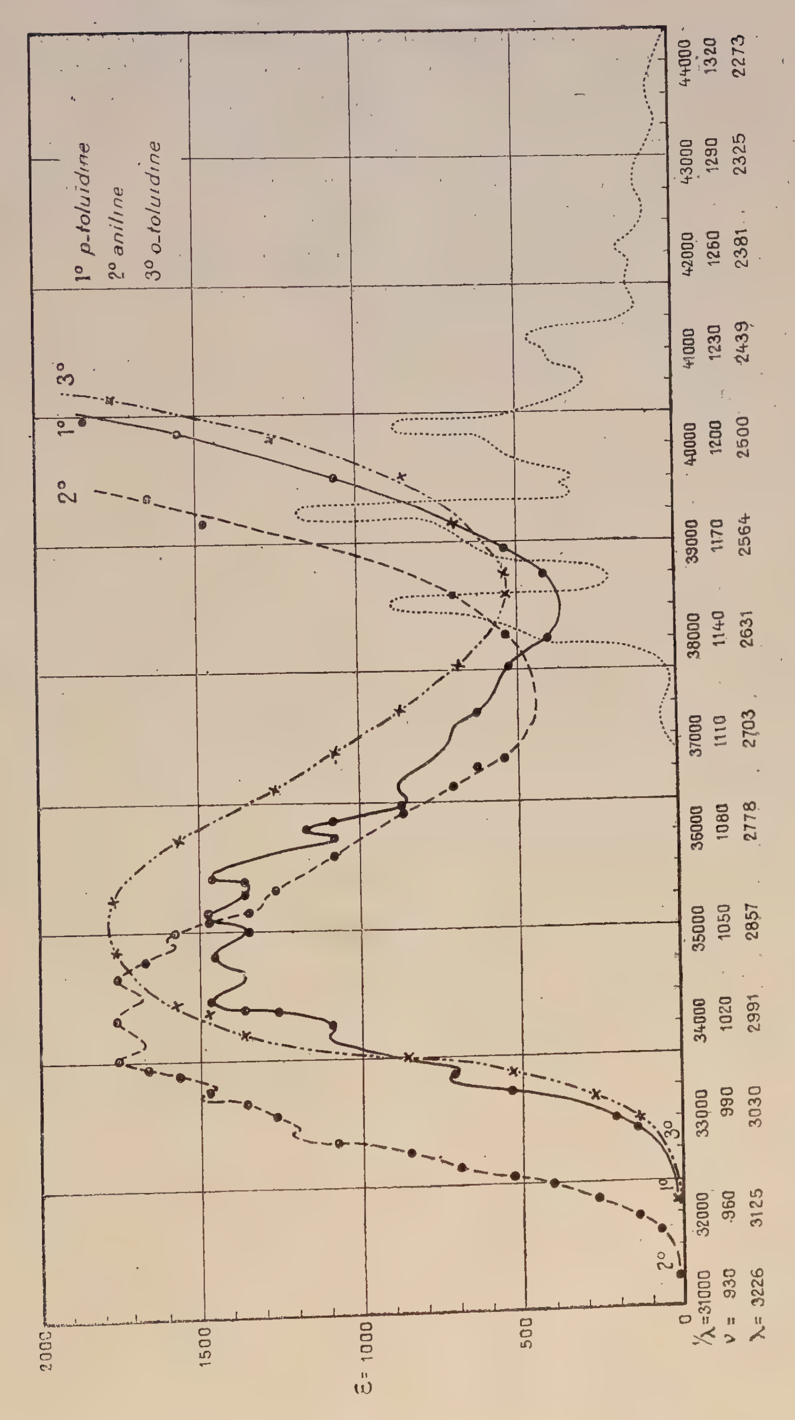
Résultats. — 1° L'aniline en solution hexanique possède neuf bandes étroites entre $\lambda = 2991$ et 2704, et une bande large pour $\lambda = 2340$. Ce spectre normal se rapproche de celui de la vapeur d'aniline.

Les bandes étroites sont presque équidistantes entre elles, $\Delta \frac{1}{\lambda}$ étant en moyenne égal à 450^{-1} cm.

Par rapport au benzène les bandes d'absorption de l'aniline sont décalées vers le rouge de 370 A; de plus l'intensité de l'absorption est environ huit fois plus grande, ainsi que le montrent les valeurs des coefficients d'absortion moléculaires ε.

---

[1] *Handbuch der Spectroscopie*, vol. 2, pl. III.


1° p-toluidine
2° aniline
3° o-toluidine
ε = 1000
2000
1500
500
0
1/λ = 31000 32000 33000 34000 35000 36000 37000 38000 39000 40000 41000 42000 43000 44000
ν = 930 960 990 1020 1050 1080 1110 1140 1170 1200 1230 1260 1290 1320
λ = 3226 3125 3030 2991 2857 2778 2703 2631 2564 2500 2439 2381 2325 2273

2° Le spectre d'absorption de l'aniline en solution dans l'eau, l'alcool et le CCl^4 est très différent du spectre normal : les bandes étroites sont, dans ces solvants, fusionnées en une seule bande large. C'est là un phénomène analogue à celui que nous avons trouvé pour le phénol et les diphénols [1].

3° Les spectres d'absorption de l'*ortho* et de la *para*-toluidine sont très différents : l'ortho possède deux bandes larges, tandis que le dérivé para présente sept bandes étroites et une bande large dans l'ultraviolet extrême.

Le spectre de l'ortho est décalé, par rapport à celui de l'aniline, environ de 15 Å, tandis que celui du para est décalé de 80 Å.

Ces différences, entre le dérivé *para* et l'*ortho*, sont identiques à celles que nous avons décrites pour les xylols et les diphénols.

Les positions des bandes et les valeurs des coefficients d'absorption moléculaires sont donnés dans le Tableau suivant :

λ.	$\frac{1}{\lambda}$.	$\Delta\frac{1}{\lambda}$.	ε.
	Aniline.		
2991	33 434	″	710
2959	33 795	361	1110
2918	34 270	475	1470
2877	34 758	488	1470
2840	35 211	453	1470
2808	35 613	402	1470
2772	36 075	462	1170
2740	36 496	421	880
2704	36 982	486	700
2340	42 735	″	7000
	Para-toluidine.		
3043	32 862	″	1220
3002	33 311	449	1500
2968	33 693	382	1750
2933	34 095	402	1750
2897	34 518	423	1750
2859	34 977	459	1600
2838	35 298	321	1300
2356	42 445	″	7000
	Ortho-toluidine.		
2850	35 088	″	1750
2331	42 900	″	7000

La forme et la position des courbes d'absorption de l'aniline et des deux toluidines sont indiquées sur la figure.

---

[1] *Comptes rendus*, t. 175, 1922.

CHIMIE PHYSIQUE. — *Ionisation produite par l'hydratation du sulfate de quinine*. Note de M[lle] **Chamié**, présentée par M. G. Urbain.

J'ai repris la question de l'ionisation qui accompagne le phénomène d'hydratation du sulfate de quinine (Le Bon) (1). Pour donner une preuve directe que l'effet d'ionisation a pour cause l'hydratation, j'ai étudié le phénomène d'hydratation par l'augmentation du poids du sel en me servant de la balance système Curie, qui offre cet avantage qu'on peut par des lectures directes à l'échelle graduée, suivre les déplacements continus du levier pendant toute la durée du phénomène. Le sulfate de quinine desséché d'abord et refroidi ensuite dans un dessiccateur donne une courbe caractéristique de l'augmentation du poids en fonction du temps pendant son hydratation. J'ai observé les influences diverses que font subir à ces courbes les variations de la température, de l'épaisseur de la couche et du volume d'air dans lequel l'hydratation se produit.

En même temps, j'ai construit les courbes de la diminution du courant d'ionisation en fonction du temps, lorsque l'hydratation se produisait dans une chambre d'ionisation. Le volume de cette chambre doit être suffisant pour assurer la quantité d'eau nécessaire à l'hydratation complète.

En comparant la courbe d'augmentation du poids avec la courbe de la diminution du courant en fonction du temps pour une même quantité de sulfate de quinine on constate une analogie frappante entre ces deux phénomènes :

1° La durée du phénomène est la même pour les deux courbes et dépend de la densité avec laquelle le sel est réparti sur la surface donnée.

2° Tout effet modifiant la courbe du poids agit de la même manière sur la courbe du courant.

3° Le poids de l'eau d'hydratation ainsi que l'intensité maximum du courant d'ionisation et la quantité d'électricité dégagée pendant l'hydratation semblent être proportionnels au poids du sulfate de quinine utilisé.

4° Si l'on construit la symétrique de la courbe du poids par rapport à

(1) Le Bon, *Comptes rendus*, t. 130, 1900, p. 891. — M[is] Gates, *Phys. Rev.*, 1904, 1906, 1907. — Kalahne, *Ann. d. Phys.*, 1905. — De Broglie et Brizard, *Comptes rendus*, t. 152, 1911, p. 136 et 855. — Kalähne u. Federlin, *Z. S. wiss. Photogr.*, t. 20, 1921, p. 199. — Gerhard Schmidt, *Zeit. für Phys.*, t. 8, 3, 1922, p. 160.

l'axe des abscisses, on constate que la courbe ainsi obtenue est analogue à la courbe de diminution du courant d'ionisation en fonction du temps.

Ces observations sont plus ou moins qualitatives encore à cause de la difficulté d'atteindre le courant de saturation et à cause des influences diverses que subit le phénomène et qui devront être éliminées dans des expériences plus précises. Cependant elles suggèrent déjà une interprétation qui devra être vérifiée et qui pourra s'appliquer également à d'autres phénomènes du même genre.

Soient $p = f(t) + p_0$ où p est le poids du sulfate de quinine, p_0 le poids initial du sel desséché, t le temps variant de o — moment initial de l'observation à T — durée du phénomène et $f(t)$ une fonction continue croissante telle que $f(0) = 0$ et $f(T) = P$ — poids de l'eau totale d'hydratation. A cause de l'analogie entre les deux courbes on peut poser : $i = -af(t) + \mathfrak{I}$, où i est le courant d'ionisation, $\mathfrak{I}$ l'intensité maximum de ce courant pour $t = 0$ et a une constante qui doit être égale à $\frac{\mathfrak{I}}{P}$ puisque pour $t = T$ on a $i = 0$; on aurait également la valeur de a d'après $a = \frac{\mathfrak{I} - i_n}{p_n - p_0}$ où i_n et p_n correspondent à la même valeur de l'abscisse t_n. On peut écrire également $i = -a(p - p_0) + \mathfrak{I}$. Si a est effectivement une constante on peut calculer l'intégrale

$$\int_{p_0}^{p_0+P} i\,dp = -a\int_{p_0}^{p_0+P} p\,dp + (\mathfrak{I} + ap_0)\int_{p_0}^{p_0+P} dp = \frac{aP^2}{2},$$

mais $dp = f'(t)\,dt$, donc

$$\int_{p_0}^{p_0+P} i\,dp = \int_0^T i f'(t)\,dt.$$

On peut, à cette dernière intégrale, appliquer le théorème de la moyenne. Alors

$$\int_0^T i f'(t)\,dt = \mu \int_0^T i\,dt.$$

Or $\int_0^T i\,dt = Q$ — quantité totale d'électricité dégagée pendant le phénomène; donc finalement $\mu Q = \frac{aP^2}{2}$.

En première approximation, on peut prendre pour μ la valeur de la moyenne arithmétique des tangentes trigonométriques des angles que font les tangentes aux courbes des poids avec l'axe des abscisses. Or j'ai trouvé

que cette moyenne est proportionnelle au poids du sel, donc on peut poser $\mu = bP$; ceci étant, la quantité d'électricité dégagée pendant l'hydratation du sulfate de quinine serait proportionnelle au poids d'eau d'hydratation : $Q = \frac{a}{2b} P$, le coefficient $\frac{a}{2b}$ serait l'équivalent électrique de l'unité de poids de l'eau d'hydratation du sulfate de quinine.

CHIMIE PHYSIQUE. — *Sur une classe d'hydrates peu stables appelés hydrates de gaz.* Note [1] de M. A. **Bouzat**, transmise par M. Paul Sabatier.

La composition des hydrates de gaz a fait l'objet d'un grand nombre de déterminations expérimentales.

Elle peut, d'autre part, être établie par le calcul : à l'aide des courbes de dissociation, on calcule la chaleur de formation Q à partir de l'eau liquide, q à partir de l'eau solide : le quotient de $Q - q$ par la chaleur moléculaire de solidification de l'eau est égal au nombre de molécules d'eau que contient l'hydrate. Cette méthode, indiquée par M. Le Chatelier [2] à propos de l'hydrate de chlore, a été développée par M. de Forcrand [3].

Par suite des difficultés qu'elles présentent, les diverses déterminations de la composition des hydrates de gaz ont donné des résultats assez peu concordants.

Cependant, M. Villard [4] a obtenu expérimentalement pour les hydrates de N^2O, de CO^2, de C^2H^2, de SO^2 et de CH^3Cl la même formule $M, 6H^2O$, et il a émis l'hypothèse que cette formule est celle de toutes « les combinaisons dissociables, susceptibles d'exister seulement à l'état solide, formées par l'eau avec divers gaz ».

Je me suis proposé de calculer, aussi exactement que possible, les quantités Q et q et d'examiner si les valeurs trouvées pour la différence $Q - q$ conduisent à la formule $M, 6H^2O$.

Calcul de q. — La meilleure méthode pour déterminer q paraît être d'appliquer la formule $\frac{q}{T} = k$ des systèmes univariants qui comprennent une phase gazeuse [5]. Mais il y a lieu de remarquer que la valeur de la cons-

---

(1) Séance du 3 janvier 1923.

(2) Le Chatelier, *Comptes rendus*, t. 99, 1884, p. 1076.

(3) De Forcrand, *Annales de Chimie et de Physique*, 7e série, t. 29, 1903, p. 36.

(4) Villard, *Annales de Chimie et de Physique*, 7e série, t. 11, 1897, p. 383.

(5) Le Chatelier, *Bulletin de la Société chimique*, t. 47, 1887, p. 482. — Matignon, *Comptes rendus*, t. 128, 1899, p. 103. — De Forcrand, *Annales de Chimie et de Physique*, 7e série, t. 28, 1903, p. 384 et 531.

tante k varie avec les divers groupes de systèmes [1]. On obtient un résultat exact en prenant pour k la constante des systèmes sol. $\rightleftharpoons$ sol. + gaz et pour T la température absolue à laquelle la courbe de dissociation de l'hydrate en eau solide et en gaz atteindrait la pression de 760^{mm} si elle était suffisamment prolongée. Cette valeur de T est d'ailleurs facile à déterminer : il suffit de se servir de la correspondance que présentent les courbes sol. $\rightleftharpoons$ sol. + gaz [1].

Calcul de Q. — J'ai appliqué la formule de Clapeyron en des points régulièrement distribués sur la courbe de dissociation de l'hydrate en gaz et eau liquide, et j'ai pris la moyenne des résultats ainsi obtenus. Mais on ne doit pas employer l'équation de Clapeyron intégrée. On déterminera la quantité de chaleur Q_1 absorbée par la dissociation d'une molécule de l'hydrate en se servant de la formule $Q_1 = \frac{T}{E} v \frac{dp}{dT}$. Le facteur $\frac{dp}{dT}$ est mesuré sur la courbe de dissociation. La variation de volume v se déduit du volume d'une molécule de gaz parfait par les corrections principales suivantes :

Correction (1) le gaz n'est pas parfait ;

Correction (2) la molécule de gaz mise en liberté se dissout en partie ;

Correction (3) la phase gazeuse contient de la vapeur d'eau.

La chaleur Q de décomposition de l'hydrate en gaz pur et en eau pure liquide est égale à la quantité Q_1 augmentée de la quantité de chaleur qui serait absorbée par le dégagement du gaz dissous [correction (4)], et diminuée de la quantité de chaleur qui serait produite par la condensation de la vapeur d'eau [correction (5)].

Bien que les calculs exigent l'emploi de diverses données numériques qui ne sont connues qu'avec une certaine approximation, j'ai trouvé, notamment pour les hydrates de Cl^2, de Br^2, de SO^2, la formule $M, 6H^2O$, conforme aux résultats expérimentaux et à l'hypothèse de M. Villard.

Il paraît exister une classe nombreuse d'hydrates caractérisée par les propriétés suivantes : leur formule est $M, 6H^2O$, ils sont peu stables, ils sont formés avec un faible dégagement de chaleur à partir des constituants pris à l'état solide, par dissociation ils perdent à la fois leurs 6 molécules d'eau.

Ces hydrates sont susceptibles de constituer d'autres hydrates plus complexes du type : $nM, n'M', (n + n')6H^2O$.

S'ils ont même formule $M, 6H^2O$, et des propriétés semblables, ils pro-

---

(1) BOUZAT, *Annales de Chimie et de Physique*, 8e série, t. 4, 1905, p. 145.

viennent pourtant de l'union avec l'eau des corps les plus divers : simples ou composés, minéraux ou organiques.

Il est remarquable que la seule combinaison connue de l'argon soit un hydrate (¹), qui appartient vraisemblablement à cette catégorie. Ce sont des valences secondaires qui lient la molécule M aux 6 molécules d'eau; on peut attribuer comme schéma aux hydrates M, $6H^2O$ un octaèdre régulier dont les 6 molécules d'eau occuperaient les sommets.

Rosenstiehl (²) a, d'autre part, remarqué qu'une proportion élevée des sels cristallise avec un nombre de molécules d'eau égal à 3 ou multiple de 3, et il a présenté ce fait comme une conséquence de l'existence dans l'eau de molécules polymérisées, qui s'unissent telles quelles au sel anhydre.

MM. Delépine et Boussi (³) ont expliqué les faits qui ne concordent pas avec la thèse de Rosenstiehl en observant que la combinaison doit très souvent avoir pour résultat de répartir les molécules d'eau dans l'hydrate autrement que dans l'eau à l'état de liberté. C'est en effet ce qui doit se produire pour les hydrates formés avec une assez grande affinité.

Mais il semble que lorsque deux corps s'unissent avec une très faible affinité, ils gardent dans le composé formé « un état moléculaire aussi voisin que possible de celui qu'ils possèdent à l'état de liberté (⁴) ».

La nombreuse classe d'hydrates peu stables de formule M, $6H^2O$ serait ainsi de nature à faire supposer la présence dans l'eau de molécules $(H^2O)^6$, ce qui donnerait à ces hydrates la formule très simple MM', ou du moins de molécules $(H^2O)^n$, n étant probablement 3 ou un multiple de 3.

ANTHROPOLOGIE. — *Sur un nouveau matériel industriel de l'époque néolithique.* Note de M. L. **Franchet.**

On sait qu'à l'époque néolithique l'agriculture était déjà connue, mais jusqu'à ce jour on était resté dans une complète ignorance de ce que pouvait être le matériel agricole utilisé pour la préparation du sol.

(¹) Villard, *Comptes rendus*, t. 123, 1896, p. 377.

(²) Rosenstiehl, *Bulletin de la Société chimique*, 4ᵉ série, t. 9, 1911, p. 77, 175, 281, 327.

(³) Delépine et Boussi, *Bulletin de la Société chimique*, 4ᵉ série, t. 23, 1918, p. 278.

(⁴) Berthelot, *Annales de Chimie et de Physique*, 3ᵉ série, t. 46, 1856, p. 491.

Il est donc intéressant de signaler la découverte d'un outillage agricole, très nombreux, trouvé dans une couche néolithique non remaniée, découverte qui vient apporter à l'histoire de la civilisation primitive des documents complètement nouveaux.

En août 1886, j'avais trouvé près de Piscop, à la lisière de la forêt de Montmorency, puis, quelque temps après, à proximité du fort de Domont, plusieurs instruments taillés, en grès lustré, possédant un faciès particulier. Ces pièces provenaient d'ateliers locaux très importants dont je ne pus alors faire une étude approfondie.

Vingt-quatre ans plus tard, en 1910, le Dr Cotard récoltait, sur la butte du Prieuré (territoire de Saint-Leu) d'autres grès taillés.

Enfin, le 3 juin 1921, M. Louis Giraux trouvait également, au cours de recherches géologiques dans la région de Chauvry, quelques outils particulièrement intéressants.

M. Giraux et moi décidâmes alors d'entreprendre, en collaboration, une étude complète des ateliers néolithiques de la forêt de Montmorency et de procéder à des fouilles méthodiques. Nos recherches aboutirent à la découverte de plusieurs ateliers. Au mois de septembre 1921, nous commençâmes les fouilles dans un grand atelier situé à l'est de la butte du Prieuré, et, peu après, à Piscop. Les fouilles, que nous poursuivons sans discontinuer depuis cette époque, nous ont donné un très grand nombre d'instruments situés dans une couche archéologique intacte, d'une épaisseur moyenne de $0^{m},60$, reposant sur un banc de sable de Fontainebleau, généralement ferrugineux. A la base du gisement, on rencontre fréquemment des blocs de grès présentant des traces de travail humain. On y trouve également, reposant sur le sable, de nombreux foyers allumés par les tailleurs de grès.

Il y a absence totale d'objets polis ou préparés pour le polissage, de pointes de flèches et de céramique.

Un grand nombre des outils taillés appartient à des types qui n'avaient jamais été signalés jusqu'ici et leur destination serait demeurée une énigme sans le secours de l'ethnographie qui nous a permis de les diviser en deux séries principales : les outils agricoles et les outils à travailler le bois.

Outils agricoles. — Nous en avons trouvé trois catégories : les socs de charrue, les houes et les pics. Une quatrième catégorie semble devoir être considérée comme des dents de herse, mais, pour résoudre complètement cette question, des renseignements ethnographiques complémentaires sont indispensables, bien que ceux que je possède déjà paraissent bien probants.

Nous avons rencontré trois types de socs : les socs massifs à section triangulaire, ceux à section quadrangulaire et les socs plats. Tous ces instruments soigneusement taillés dans des blocs de grès affectent des formes nettement déterminées pour faciliter le travail du sol. Ils atteignent parfois le poids de 10^{kg}.

Les houes sont triangulaires, carrées ou à tranchant arrondi.

Les pics présentent une grande variété de formes.

Je dois signaler ce fait remarquable que ces instruments agricoles néolithiques sont bien les ancêtres de nos instruments modernes, ceux-ci ayant été à peine modifiés depuis ces époques reculées.

Outils à travailler le bois. — Ces outils sont de formes très variées, mais les plus nombreux sont ceux qui servaient à équarrir et à percer; parmi les premiers, beaucoup sont fortement arqués et parfois de grande dimension ($0^m,40$), lourds en proportion (jusqu'à 3^{kg}). Puis on trouve tous ceux qui permettaient par leur taille, de plus en plus réduite (2^{cm} à 3^{cm}), de débiter peu à peu la pièce de bois à l'état de petits objets nécessaires à la vie courante.

Comme instruments tranchants : des ciseaux (abondants) et de rares tranchets d'un type très primitif.

Parmi les racloirs, il y a plusieurs formes nouvelles, notamment des racloirs dentés ne pouvant être assimilés aux scies néolithiques classiques de l'époque robenhausienne.

Age des ateliers. — Il serait prématuré de fixer dès maintenant l'âge exact de ces ateliers. Cependant l'outillage par sa technique générale ne peut être postérieur au Campignien, d'autant plus que les ciseaux et les tranchets sont d'un type tout à fait primitif.

BOTANIQUE. — *Sur la persistance des caractères provoqués par la salure.* Note de M. **Pierre Lesage**, présentée par M. Guignard.

Dans mes cultures de 1922, exécutées avec le *Lepidium sativum*, j'ai fait deux groupes très distincts : dans le premier, j'ai continué les cultures en pots, sous châssis, commencées en 1911; dans le second, j'ai semé les graines de 1916 à 1921 sur une plate-bande, en pleine terre, plein air, avec des arrosages à l'eau ordinaire partout pour voir ce que devenaient les caractères des plantes salées dans ces nouvelles conditions. Ce sont les

principaux résultats de ce second groupe que je me propose de donner ici.

Voyons d'abord quelques-uns des caractères par lesquels les plantes arrosées avec des solutions de sel marin peuvent se distinguer des témoins non salés. Parmi ces caractères, j'en ai signalé et employé plus particulièrement quatre : la taille des plantes, le nombre de grosses graines pour 1000, le poids de 1000 de ces graines et enfin le rapport de leur longueur à leur largeur. Voici, pris dans les cultures salées de 1922, un Tableau de moyennes qui donne une idée des différences que je désire considérer en ce moment :

Culture.	Taille.	Grosses graines pour 1000.	Poids de 1000.	$\frac{\text{Longueur}}{\text{Largeur}}$
Salée	26cm,3	430	2g,480	1,628
Témoin	40cm,3	892	2g,935	1,904

D'après ce Tableau, les plantes salées ont une taille plus petite, produisent des grosses graines plus courtes, en nombre relativement plus faible, avec un poids moins fort que dans les plantes témoins. Ces différences sont assez marquées.

Nous allons voir ce qu'elles deviennent quand on les recherche dans les plantes non salées, mais issues des graines des plantes salées de 1916 à 1921 et semées en 1922.

Avant d'en arriver là, il me paraît utile de relever dans mes notes les mesures concernant les plantes salées et les témoins pendant cette période de six années afin de pouvoir faire des comparaisons.

Caractère.	Culture.	1916.	1917.	1918.	1919.	1920.	1921.
Taille (cm)	Salée	31,7	17,7	21,3	24,0	38,1	33,5
	Témoin	37,2	32,6	32,8	35,0	63,9	41,5
Grosses graines pour 1000	Salée	389	314	203	120	864	384
	Témoin	728	687	672	722	821	542
Poids de 1000 graines (gr)	Salée	2,680	2,560	2,583	2,371	2,754	2,500
	Témoin	2,978	3,085	2,892	2,772	3,014	2,543
$\frac{\text{Longueur}}{\text{Largeur}}$	Salée	"	"	"	"	1,540	1,690
	Témoin	"	"	"	"	1,944	1,974

Il faut dire que les nombres ci-dessus ne sont réellement comparables que dans la même année, parce que diverses conditions extérieures et le sol des cultures, le même seulement dans la même année, ont certainement varié d'une année à l'autre. Sous le bénéfice de cette restriction, on voit que les différences entre les plantes salées et les témoins se sont toujours montrées, dans ces années 1916 à 1921, de même sens qu'en 1922, abstraction faite des nombres de grosses graines de 1920, qui sont à retenir pour plus tard.

Voyons maintenant si ces caractères se maintiennent aussi tranchés dans les plantes arrosées à l'eau ordinaire, mais issues de plantes salées. Un peu avant 1916, j'avais pris l'habitude de cultiver des plantes salées, des plantes témoins et des plantes non salées issues des plantes salées de l'année précédente, pour chercher à saisir des faits d'hérédité s'il s'en produisait dans cette première génération de plantes non soumises à la salure. Comme j'ai gardé des graines de toutes mes cultures depuis 1911, en les semant en 1922, j'ai obtenu des plantes qui, toutes arrosées à l'eau ordinaire, me donnaient des plantes de première génération (1re G.), de deuxième génération (2e G.) non salées et la continuité des témoins. Un exemple pour préciser : avec les graines de 1918, dans le second groupe indiqué au commencement de cette Note, j'avais des témoins continuant les témoins de 1911, des plantes de première génération provenant de plantes qui avaient été salées jusqu'en 1918, c'est-à-dire pendant huit années, et des plantes de deuxième génération provenant de plantes arrosées à l'eau ordinaire en 1918, mais issues de plantes salées jusqu'en 1917, c'est-à-dire pendant sept ans

Le Tableau suivant nous donne les moyennes des mesures prises dans cette longue série.

Caractère.	Culture.	1916.	1917.	1918.	1919.	1920.	1921.
Taille (cm)	1re G.	44,8	43,3	44,7	39,5	45,8	44,6
	2e G.	41,8	51,1	48,6	43,9	50,9	48,6
	Témoin	44,0	44,4	46,2	42,9	43,5	45,8
Grosses graines pour 1000	1re G.	628	617	476	899	669	747
	2e G.	622	847	839	407	559	820
	Témoin	635	762	730	659	447	890
Poids de 1000 graines (gr)	1re G.	2,609	2,616	2,506	2,943	2,817	2,838
	2e G.	2,456	2,734	2,625	2,332	2,750	2,974
	Témoin	2,711	2,746	2,739	2,874	2,621	2,907
$\frac{\text{Longueur}}{\text{Largeur}}$	1re G.	1,651	1,677	1,707	1,627	1,687	1,646
	2e G.	1,734	1,687	1,617	1,740	1,742	1,524
	Témoin	1,945	1,972	1,924	1,026	2,000	1,937

Dans ce groupe, le sol, plate-bande de jardin en plein air, les arrosages, toutes les conditions étaient les mêmes moins l'origine des graines, par conséquent les mesures peuvent se comparer dans les six années du troisième Tableau ; mais, si l'on veut les comparer à celles du deuxième Tableau, il faut se rappeler que celui-ci donne des mesures prises sur des plantes cultivées en pots, sous châssis et dans des sols différents d'une année à l'autre et différents de la terre de la plate-bande.

Comme ces expériences seront continuées, je n'interpréterai pas rigoureusement ces mesures, je me contenterai de relever quelques particularités pour les retenir.

D'abord les graines de 1916 ont gardé leur faculté germinative après six ans, c'est-à-dire au delà de la limite indiquée par les auteurs. La première génération de 1919 a donné des mesures non comparables aux autres, cela tient à des causes que je ne puis indiquer ici. La taille reste homogène dans les témoins, tandis qu'il y a des oscillations assez marquées dans les générations non salées des plantes antérieurement salées ; il y a là matière à recherche. Il en est un peu de même pour le nombre relatif des grosses graines. Le poids et la forme des graines rappelleraient davantage le sens des différences qui existent entre les témoins et les plantes salées; ils marqueraient le mieux une certaine persistance dans les caractères provoqués par la salure.

CHIMIE AGRICOLE. — *Étude biochimique des sols forestiers.* Note de MM. **Antonin Němec** et **Kvapil Karel**, présentée par M. L. Maquenne.

Les sols forestiers diffèrent très nettement dans leurs caractéristiques principales de ceux des grandes cultures agricoles. Malgré les nombreuses études faites sur ceux-ci, les propriétés des sols forestiers sont jusqu'à présent relativement peu connues, quoique cette connaissance offre un intérêt vraiment particulier, non seulement au point de vue de la science pure, mais surtout à celui de la pratique sylvicole.

Il est d'une grande importance de se rendre compte de la manière dont les diverses essences et formes des peuplements forestiers réagissent sur l'érémacausis du sol. Dans ce but, nous avons étudié d'abord l'influence de diverses essences sur certaines réactions biochimiques du sol, permettant de conclure sur son activité biologique, c'est-à-dire sur les deux principales formes de son acidité (acidité active et acidité échangée contre la solution normale de chlorure de potassium) et sur son pouvoir catalytique.

Des nombreuses expériences (plus de 120) que nous avons faites sur divers humus, terres végétales et minérales des forêts tchécoslovaques nous extrayons quelques résultats dans les Tableaux suivants.

L'acidité du sol fut déterminée par la méthode colorimétrique de

Michaelis (¹) (30g de terre pour 100cm³ d'eau ou de chlorure de potassium normal); l'activité catalasique fut mesurée en centimètres cubes d'oxygène libéré de l'eau oxygénée à 3 pour 100 (1g de substance pour 40cm³ d'eau et 20cm³ d'eau oxygénée).

TABLEAU I.

Sols argilo-siliceux de Třemošnica, Bohême.

Essences.		Acidité en *p*H active.	Acidité en *p*H échangée.	Catalase. — Oxygène dégagé en 10 minutes. (cm³)
Futaie de hêtre âgée de 80 ans..	Humus...........	5,9	4,4	68,7
	Terre minérale....	5,9	4,0	4,6
Futaie d'epicea âgée de 80 ans.	Humus...........	4,6	3,8	29,2
	Terre minérale....	5,8	3,7	1,1
Mélange de hêtre et d'epicea..	Humus...........	5,0	4,6	42,2
	Terre minérale....	6,2	4,25	21,2
Futaie de pin sylvestre avec jeune taillis de chêne......	Humus...........	5,5	4,5	51,9
	Terre minérale....	5,7	4,0	9,3
Futaie de chêne avec jeune taillis de charme........	Terre végétale....	6,0	5,0	16,6
	Terre minérale....	6,1	4,2	3,7
Taillis de tilleul, charme et érable..................	Humus...........	5,9	5,3	35,6
	Terre minérale....	6,1	4,3	4,7
Gaulis d'epicea	Humus...........	4,9	3,9	36,0
	Terre minérale....	5,5	4,2	8,3

TABLEAU II.

Sols argileux de Kolodèje (Bohême).

Essences.		Acidité en *p*H active.	Acidité en *p*H échangée.	Catalase. — Oxygène dégagé en 10 minutes. (cm³)
Futaie de chêne pédonculé...	Humus...........	5,2	3,3	9,2
	Terre minérale....	5,0	4,0	2,0
Futaie d'epicea rabougrie....	Humus...........	4,0	4,0	11,6
	Tourbière sous sol.	4,9	4,2	8,8
Futaie de pin sylvestre	Humus...........	4,6	3,0	18,7
	Terre minérale....	5,1	3,1	0,0

(¹) *Wochensch. f. Bräuerei*, t. 38, nº 21, 1921; *Bioch. Zeitsch.*, t. 109, 1920, p. 165.

TABLEAU III.

Influence de l'essence sur l'acidité des sols de diverses compositions physiques.
Acidité active en pH.

Nature des sols.		Epicea.	Pin sylvestre.	Chêne ou hêtre.
Sol argileux de Koloděje	Humus..........	4,1	4,6	5,2
	Terre minérale....	4,9	5,1	5,0
Sol sablonneux de Turnov....	Humus..........	4,8	4,9	5,4
	Terre minérale....	5,5	5,1	5,7
Sol argilo-siliceux de Třemošnica................	Humus..........	4,9	5,2	5,9
	Terre minérale....	5,5	5,5	6,0

Il faut remarquer que les échantillons de certains groupes, indiqués dans les Tableaux, furent tirés d'endroits éloignés seulement de quelques mètres, afin de pouvoir exclure pratiquement les variabilités possibles dans le caractère du sol même, de façon qu'on pouvait être assuré que les changements intervenus dans les propriétés biochimiques de la terre sont bien dus seulement aux réactions des peuplements examinés.

En conséquence de toutes ces observations il résulte que l'acidité active d'un même sol forestier diffère très nettement sous l'influence des diverses espèces et formes de son peuplement. En général, on peut constater que l'humus des futaies feuillues montre une acidité active moins grande que celui des espèces à feuilles persistantes de la même région. Ces relations sont exprimées aussi dans la mesure de l'acidité échangée. Les sols portant des mélanges d'espèces feuillues et de conifères se présentent moins acides que ceux des peuplements feuillus ou aciculaires purs sur le même terrain.

Il n'est pas sans intérêt de remarquer que l'acidité de l'humus et de la terre minérale sous la même espèce dépend beaucoup de la nature du sol considéré.

On voit dans le Tableau III que l'acidité active du sol, sous l'influence de la même essence pure, feuillue ou aciculaire, de la région argileuse de Koloděje est beaucoup plus élevée en comparaison avec celle des sols sablonneux de Turnov, tandis que les peuplements sur le sol argilo-siliceux de Třemošnice fournissent les données les plus basses.

PHYSIQUE VÉGÉTALE. — *La croissance des végétaux et les principes de la Physique.* Note de M. V. Crémieu, présentée par M. Daniel Berthelot.

Le but de la présente Note est de grouper des faits connus et quelques faits nouveaux pour mettre en évidence la façon particulière dont la matière végétale en voie de croissance se comporte par rapport aux principes de la Physique.

1° Le processus de la *croissance* met en jeu une propriété spéciale aux végétaux, le *géotactisme*. Le résultat final de ce phénomène est d'élever, contre la pesanteur, toute la matière qui constitue la tige, les feuilles et les fruits, à une hauteur finie, en un temps fini.

Par exemple 125^{kg} de graines d'avoine répandus sur un hectare de terre élèvent, en 4 mois, un poids de 1500^{kg} de grains et 3000^{kg} de paille à une hauteur d'environ $0^{m},60$; l'évolution végétale a, dans ce cas, produit 2700^{kgm} contre la pesanteur. L'énergie nécessaire est empruntée à la radiation solaire et aux combinaisons chimiques que la nutrition met en jeu. Mais ce qui caractérise la croissance, c'est qu'elle utilise cette énergie pour pousser de la matière en sens inverse de celui que suivrait la matière pesante abandonnée à elle-même.

On sait d'ailleurs que, si l'on fixe par la graine encore adhérente des plantules déjà germées, de façon que la tige soit placée horizontalement, la croissance continue de façon telle que la tige s'incurve vers le haut, la racine vers le bas, et que ses parties neuves redeviennent verticales.

2° On sait par les expériences de Knight et autres savants que si, à la périphérie d'un disque horizontal, pouvant tourner autour d'un axe vertical passant par son centre, on fixe des plantules de façon que leur tige soit verticale, on observe ce qui suit. Lorsqu'on fait tourner le disque, la croissance de la tige se poursuit de telle façon que les parties nouvelles se rapprochent de l'axe, suivant une direction centripète parallèle à la résultante entre le champ gravifique terrestre et le champ centrifuge dû à la rotation du disque. Quant aux parties nouvelles de la racine, elles s'incurvent suivant une direction centrifuge.

Si la vitesse de rotation devient suffisante, le champ centrifuge devient grand par rapport au champ terrestre. La tige pousse alors horizontalement, vers l'axe, et la racine en sens contraire; ceci montre que l'effet du

géotactisme ne dépend pas de la masse pesante des cellules en voie de croissance.

3° Rappelons le processus morphologique de la croissance de la tige.

Une ou plusieurs cellules *initiales* émettent des segments de méristème entre les parties déjà poussées de la plante et la cellule initiale. Ces segments se cloisonnent et donnent naissance à des tissus nouveaux *en dessous* de l'initiale, qui demeure initiale tant que dure la croissance. Tout se passe donc comme si l'initiale était repoussée par la terre. Cependant, détachée du végétal, elle est régulièrement pesante et d'ailleurs le poids d'un végétal augmente à mesure qu'il croît. Il existe donc une *action caractéristique* de la cellule initiale.

J'ai cherché à déterminer expérimentalement si cette action se produit au sein de la cellule, ou résulte au contraire d'un champ extérieur à elle, dû à sa présence et combinant, dans son voisinage, ses effets avec ceux du champ gravifique terrestre.

D'après le poids de matière qu'une tige élève contre la pesanteur, en un temps donné, on calcule le travail de la croissance par seconde. Il est, par exemple, de $\frac{3}{100}$ d'erg pour une tige jeune de maïs ou d'oignon.

Si ce travail résulte de l'existence d'un champ extérieur à la cellule, la valeur de celui-ci sera, dans son voisinage immédiat, de quelques centièmes de dynes; par suite de l'ordre du $\frac{1}{10000}$ du champ terrestre, et par conséquent mesurable par ses effets sur un corps d'épreuve approprié.

J'ai pris le plateau d'une micro-balance sensible au $\frac{1}{250}$ de milligramme, c'est-à-dire à des effets dix fois plus grands, environ, que ceux à mettre en évidence.

Le bord supérieur des cellules initiales du végétal était suivi avec la lunette d'un cathétomètre; l'axe de la tige en expérience était placé en face du centre du plateau en dessous de celui-ci, et de façon que la distance était d'environ 1^{cm} au commencement de l'expérience.

Tout le dispositif était protégé contre les courants d'air ou les actions phototropiques, la température du laboratoire étant, par ailleurs, constante et uniforme.

L'expérience a été répétée avec des tiges d'avoine, de maïs, de pommes de terre et d'oignon.

Aucun mouvement du plateau n'a été observé jusqu'au moment du *contact apparent*, c'est-à-dire jusqu'à ce que le bord supérieur de l'initiale ait coïncidé (au pouvoir séparateur de la lunette près, soit $\frac{1}{50}$ de millimètre) avec la face inférieure du plateau.

J'ai observé, de plus, les particularités suivantes, immédiatement après le premier contact. A l'instant précis où il paraît se produire, le plateau est brusquement lancé vers le haut; il exécute une série de petites oscillations, limitées vers le bas, par des

chocs contre l'initiale, au contact de laquelle il s'arrête après quelques secondes. Quelques secondes après il reçoit une nouvelle impulsion, suivie d'une série d'oscillations, d'un arrêt, d'une autre impulsion et ainsi pendant quelques minutes.

Les impulsions successives sont d'intensités décroissantes jusqu'au moment où la tige paraît pousser d'une manière continue, mais obliquement, en déviant le plateau.

Cette apparence résulte de ce que la pression exercée par le plateau sur le bord supérieur des initiales va en augmentant à mesure que le fléau de la micro-balance s'infléchit davantage par suite de la croissance de la tige. Il arrive un moment où l'impulsion due à l'émission d'un segment de méristème devient insuffisante pour lancer le plateau.

Mais on peut conclure de ces résultats que *l'action* qui provoque l'émission des segments du méristème est discontinue, et tout à fait comparable à l'émission d'un rayon alpha par un atome radioactif.

L'émission d'un segment de méristème correspond à une certaine valeur de la turgescence de la cellule, qui finit par éclater. Or l'accroissement de la turgescence résulte d'échanges à travers la paroi semi-perméable constituée par l'enveloppe de la cellule. C'est là un processus continu et il est remarquable que les effets qu'il produit soient discontinus.

On peut, de l'ensemble des faits exposés ci-dessus, tirer la conclusion suivante :

La croissance des tiges végétales est due à une *action caractéristique intérieure aux cellules initiales, indépendante de la masse pesante de ces cellules; cette action est discontinue et dirige ses effets suivant la résultante des champs qui règnent au sein de la cellule, sans discerner entre les champs gravifiques ou les champs d'inertie.*

CYTOLOGIE. — *Sur le vieillissement de la cellule hématique.* Note de M. **L.-M. Betancès**, transmise par M. F. Henneguy.

Dans une précédente Note [1], nous avions établi que la chromatine de la cellule hématique des Métazoaires passe, lors de son vieillissement, par une série régulière et constante de formes *irréversibles* [2]. On constate ces formes aussi bien dans la cellule différenciée spécifiquement dans le sens

(1) *Comptes rendus*, t. 175, 1922, p. 1002.

(2) Il est bien entendu que nous appelons *formes* de la chromatine celles qu'on obtient au moyen de précipitations ou de coagulation du gel nucléaire. En outre, en dehors de cette série de formes, la chromatine peut subir d'autres modifications à certains moments de l'acte sécrétoire de la cellule, ou bien dans une cellule anormale.

érythrocytaire ou dans le sens granulocytaire que dans celle qui ne se différencie pas dans l'un ou l'autre de ces sens (cellules lymphocytaires et monocytaires). Pour pouvoir établir ces différentes formes, confusément décrites et souvent mal interprétées, nous avons dû suivre le développement de cette cellule depuis son apparition chez l'embryon jusqu'à son stade le plus hautement différencié chez l'animal adulte, c'est-à-dire jusqu'à sa forme circulante, forme dont on n'en voit dériver aucune autre. D'autre part, étant donné que le gel nucléaire peut subir des modifications physico-chimiques variables suivant les réactifs employés, nous avons dû traiter les cellules par un seul et même réactif (alcool méthylique-éosinate de bleu de méthylène) et en les plaçant dans les mêmes conditions (impression sur lame), afin d'éloigner toute cause dans les variations de ces formes qui ne fussent celles purement intracellulaires. Nous rappelons et nous insistons sur ce fait, que ces formes ne sont pas caractéristiques de l'une ou de l'autre espèce cellulaire, comme il a été dit : la forme poussiéroïde ou finement réticulaire, la forme à travées ou petites masses plus épaisses, ne représentent que les stades de repos, d'accroissement ou précinétique du noyau, tandis que l'épaississement grossier de ces travées ou de ces petites masses, leur disposition vers la périphérie nucléaire ou leur diffusion (pycnose, chromatorrhexis, chromatolyse), et l'isolement, la réduction et la vacuolisation du nucléole ne sont que des états qui se suivent à partir d'un certain moment pendant sa différenciation ontogénétique.

Il s'agit maintenant de savoir quel rapport peut exister entre ces variations morphologiques de la chromatine, le milieu et certaines fonctions de la cellule. Nous dirons de suite que nous n'en avons trouvé aucun. D'abord, elles s'observent aussi bien dans les cellules de la moelle osseuse que dans celles de la rate ou des autres formations lymphatiques, elles se suivent aussi bien dans celles du stroma connectif en général.

Ensuite, si nous acceptons que la différenciation spécifique de la cellule hématique est une différenciation purement fonctionnelle, représentée par les structures cytoplasmiques qu'on observe dans les cellules érythrocytaires et granulocytaires, ces formes de la chromatine n'ont plus aucun rapport avec ces fonctions, car elles se constatent dans l'un et l'autre cas, ainsi que dans les cellules lymphocytaires et monocytaires. Si ces formes sont sous la dépendance d'une fonction cellulaire, cette fonction nous échappe ou au moins elle n'est pas évidente et serait commune à toutes les variétés de cellules sanguines. En somme, d'après nos recherches, ces struc-

tures nucléaires ne s'expliquent que comme des états physico-chimiques du gel nucléaire, qui se suivent progressivement sans aucun rapport évident ni avec le milieu, ni avec la fonction, mais avec la progressive sénescence, normale nous pouvons dire, de la cellule. Il est possible qu'un déséquilibre physico-chimique ou bien une dégradation chimique des composants nucléaires se produisent à ce moment et que les produits de cette dégradation passent dans le cytoplasme et soient utilisés par lui, comme cela paraît se passer dans la cellule érythrocytaire (J. Carracido); mais, ce fait, nous n'avons pu le généraliser à toutes les cellules.

Quant à la différenciation ontogénétique du cytoplasme, caractérisée par la perte graduelle de sa basophilie, de l'endoplasme vers le périplasme, et l'épaississement de celui-ci, nous pouvons en dire autant que sur le noyau : elle n'est en relation ni avec le milieu, ni avec la fonction apparente de la cellule, mais avec un état spécial physico-chimique du gel colloïdal.

La notion principale qu'on peut tirer de ces données est que, normalement, la cellule hématique circulante des Métazoaires, que ce soit dans le sang ou dans le parenchyme même, n'est qu'une « momie », c'est-à-dire un gel plus condensé, incapable de jouer un rôle vital supérieur (croissance, reproduction, différenciation), mais seulement un rôle comme ceux que peuvent jouer certains corps (catalyseurs, hormones) ou ceux qui se traduisent par certaines figures d'amiboïsme ou de phagocytose.

MICROBIOLOGIE. — *Dissociation du complexe toxine antitoxine diphtérique et récupération d'antitoxine.* Note de M. G. **Ramon**, présentée par M. Roux.

Dissocier le complexe toxine antitoxine qui se forme dans un mélange de sérum et de toxine, pouvoir récupérer l'un des éléments de ce complexe avec ses propriétés spécifiques, c'est un problème qui n'est pas sans intérêt au point de vue de la recherche de la nature de la réaction toxine antitoxine et de la connaissance des lois qui régissent les rapports des anticorps et des antigènes en général.

Dans les travaux consacrés à l'étude de ce problème, si les expérimentateurs [et en particulier Morgenroth et ses collaborateurs (¹) dans le cas qui

(¹) Morgenroth, *Zeitsch. f. Hyg.*, 1904, p. 177. — Morgenroth et Villanen, *Verchow's trchv*, 1907, p. 378. — Morgenroth et Ascher, *Centralb. f. Bakter.*, I, Origin 1912, p. 510.

nous intéresse] ont pu dans une certaine mesure dissocier les complexes, s'ils ont réussi à mettre en évidence cette dissociation par l'augmentation de toxicité, pour un animal donné, d'un mélange primitivement inoffensif pour cet animal, il n'y a eu à proprement parler ni récupération, ni isolement de l'élément toxique ([1]). Seuls peut-être Calmette et Massol ([2]), dans le cas très spécial, il est vrai, du mélange venin sérum antivenimeux, ont pu extraire le venin avec à peu près toute sa toxicité.

Mettant à profit des données nouvelles sur certaines propriétés des mélanges de sérum et de toxine diphtériques, nous avons repris le problème en cherchant à dissocier le complexe pour essayer d'en retirer non pas le constituant toxique, mais au contraire l'élément antitoxique.

Lorsque l'on mêle sérum et toxine diphtériques de façon à constituer des mélanges neutres ou au voisinage de la neutralité, c'est-à-dire ou légèrement toxiques ou faiblement antitoxiques, on constate dans ces mélanges l'apparition d'une floculation très nette ([3]).

Cette floculation aboutit à la formation d'un précipité qui se rassemble plus ou moins rapidement au fond du récipient.

Le précipité recueilli après centrifugation, puis lavé à l'eau physiologique (dans laquelle il se montre insoluble), possède les mêmes qualités spécifiques que le mélange qui lui a donné naissance; autrement dit, il se montre ou antitoxique ou neutre ou toxique suivant que le mélange initial possédait lui-même l'une ou l'autre de ces trois qualités. En réalité, comme la suite le prouvera, ce précipité contient le complexe toxine antitoxine qui s'est formé dans le mélange.

Après avoir été centrifugé et lavé à plusieurs reprises à l'eau physiologique, puis une dernière fois, rapidement, à l'eau distillée glacée, le précipité débarrassé ainsi de la plus grande partie des sels qu'il contenait et qui provenaient soit de la toxine, soit du sérum, se dissout lentement dans l'eau distillée, à la température ordinaire. L'élimination des électro-

---

([1]) Si l'on injecte séparément à un cobaye, d'une part, la dose toxine et, d'autre part, la quantité de sérum capable de la neutraliser exactement après contact dans le verre à expérience, cette quantité de sérum est dans ces conditions d'injection séparée insuffisante pour protéger l'animal qui meurt intoxiqué. De même dans le cas du complexe dissocié, toxine et sérum coexistent dans le mélange sans être combiné. Il en résulte l'augmentation de toxicité constatée.

([2]) Calmette, *Annales de l'Institut Pasteur*, 1895. — Calmette et Massol, *Annales de l'Institut Pasteur*, 1908.

([3]) G. Ramon, *Comptes rendus de la Société de Biologie*, 1922.

lytes rend déjà le complexe que renferme la solution, moins solide, et entraîne un commencement de dissociation, ainsi qu'on peut s'en rendre compte par l'expérimentation sur le cobaye.

Si l'on fait ensuite intervenir l'action décomposante d'un acide même faible, tel que l'acide acétique à doses très minimes 1 pour 1000, 1 pour 1500, la dissociation est encore plus complète. Aussi, si l'on chauffe cette solution très légèrement acidifiée, à 58° pendant une heure, cette température agissant sur les éléments dissociés va affaiblir considérablement l'élément toxique, alors qu'elle laissera presque intacte l'antitoxine [1] : c'est ce que montrent les essais *pratiqués sur l'animal d'expériences*. Mais choisissons le cas le plus démonstratif : celui d'un mélange toxique. Constituons ce mélange avec 600^{cm^3} de toxine et $20^{cm^3},5$ de sérum antidiphtérique. Le précipité qui en est issu, lavé et émulsionné dans 75^{cm^3} d'eau physiologique, tue le cobaye en 48 heures à la dose de 1^{cm^3} de l'émulsion. Après avoir centrifugé et remis ce précipité en solution dans 75^{cm^3} d'eau distillée, traitons cette solution comme il vient d'être dit. Après action de l'acide acétique et de la chaleur, *la solution ne tue plus le cobaye, bien au contraire elle est capable, à la dose de 1^{cm^3}, de protéger l'animal contre plusieurs centaines de doses mortelles d'une toxine diphtérique qu'on lui ajoute. Dosée dans les mêmes conditions qu'un sérum ordinaire, elle titre près de 20 unités !*

Avec des mélanges neutres ou antitoxiques on peut obtenir des résultats analogues. D'un précipité légèrement antitoxique qui contenait primitivement un excès d'antitoxine correspondant à 5 unités au centimètre cube (le précipité étant dissous dans 75^{cm^3} d'eau), nous avons pu recueillir jusqu'à 60 unités au centimètre cube, la solution d'antitoxine récupérée renfermait près des trois quarts du total des unités entrant dans la constitution du mélange initial. Ainsi, en traitant par un acide faible et par la chaleur ménagée le précipité spécifique qui se forme dans un mélange antitoxique neutre ou même toxique et dont on a éliminé en grande partie les sels qui l'accompagnent, il est possible non seulement de dissocier le complexe, mais aussi d'obtenir une véritable solution d'antitoxine. Cette solution d'anti-

---

[1] La toxine diphtérique est en effet très sensible à l'action de la chaleur et aussi des acides même faibles (Roux et Yersin). A ce propos nous n'avons pas été sans être étonné des résultats obtenus par certains auteurs qui font agir sur les mélanges des acides à doses relativement fortes et qui constatent cependant une augmentation de toxicité (Morgenroth).

toxine est capable de jouer vis-à-vis de la toxine le même rôle neutralisant qu'un sérum antidiphtérique ordinaire [1].

La possibilité de cette dissociation et de cette récupération prouve nettement que la combinaison toxine antitoxine est une combinaison tout à fait instable.

HYGIÈNE PROFESSIONNELLE. — *Rôles respectifs du plomb et de l'essence de térébenthine dans la pathologie professionnelle des peintres.* Note de MM. **F. Heim**, **E. Agasse-Lafont** et **A. Feil**, présentée par M. Widal.

La profession de peintre a été, de tout temps, considérée comme exposant aux accidents saturnins en raison du maniement des couleurs plombiques : céruse notamment.

Au cours de ces dernières années, divers auteurs anglais ont repris une hypothèse, émise il y a plus de 60 ans, sur le rôle pathogénique de l'essence de térébenthine dans les accidents professionnels : hypertension, cardio-rénaux, et néphrite, présentés par les peintres, accidents imputés, à tort, selon eux, au plomb.

Il est établi que l'essence de térébenthine, ingérée à doses fortes ou longtemps prolongées, est toxique et lèse plus ou moins profondément les appareils cardio-vasculaire et rénal.

Mais a-t-elle la même action chez les ouvriers peintres exposés seulement à l'inhalation d'un air plus ou moins chargé de vapeurs d'essence de térébenthine?

Cette question, d'importance primordiale pour l'hygiène professionnelle, peut être tranchée par la comparaison de plusieurs enquêtes, par nous poursuivies sur trois catégories d'ouvriers peintres : les uns n'ayant jamais manié que la peinture au blanc de zinc; les autres, au contraire, maniant les couleurs de plomb; les derniers enfin ayant, autrefois, manié les couleurs plombiques et ne maniant plus, actuellement, que la peinture au blanc de zinc.

Nos constatations peuvent être résumées comme suit :

Sur un total de 21 ouvriers qui n'ont jamais manié que le blanc de zinc et l'essence de térébenthine, nous ne relevons aucun cas de manifestations

(1) Dissociation et récupération peuvent s'opérer à partir de mélanges même anciennement préparés.

rénales pathologiques (ni signes cliniques, ni albuminurie, ni cylindrurie, ni azotémie anormale); d'autre part, une hypertension notable n'existe que chez deux d'entre eux, c'est-à-dire dans une proportion de 9 pour 100.

Au contraire, chez 14 ouvriers, ayant manié autrefois la céruse et venus ensuite, plus ou moins tardivement, au blanc de zinc, nous relevons deux cas d'albuminurie (soit 14 pour 100) et deux cas d'hypertension (14 pour 100).

Enfin, sur un total de 200 peintres maniant encore, au moment de l'examen, les sels de plomb, la proportion des cas d'hypertension a été de 30 pour 100.

Les accidents rénaux s'élèvent de 0 à 14 pour 100, si l'on passe de la première catégorie à la seconde, c'est-à-dire des ouvriers qui tout en maniant la térébenthine n'ont jamais manié le plomb, aux ouvriers qui ont été exposés antérieurement au saturnisme.

De même l'hypertension est relativement rare chez les ouvriers maniant exclusivement la térébenthine (9 pour 100), c'est là une proportion normale chez des ouvriers pour lesquels aucune intoxication professionnelle ne peut être invoquée, et qui s'explique par les autres causes banales (influence de l'âge, des maladies antérieures, éthylisme, etc.).

L'hypertension est plus fréquente chez ceux qui ont manié antérieurement le plomb (14 pour 100), et surtout chez ceux qui y sont exposés encore au moment de l'examen (30 pour 100).

Les chiffres de morbidité professionnelle, ci-dessus, relatés, nous paraissent confirmer, d'une façon indubitable, que chez les ouvriers peintres, c'est non pas l'essence de térébenthine, mais bien le plomb et ses composés qui sont la cause habituelle des lésions rénales et de l'hypertension.

La séance est levée 16 heures et demie.

É. P.

ERRATA.

(Séance du 3 janvier 1923.)

Note de M. *Stanislas Millot*, Sur la probabilité *a posteriori* :

Page 31, ligne 2, *au lieu de*

$$z - l \leqq \frac{n}{m} < z + l,$$

lire

$$z - l \leqq \frac{r}{m} \leqq z + l.$$

Même page, ligne 2 en remontant, *au lieu de* Il est inutile, *lire* Il est utile.